

1. $a > b > 0$ 일 때, 다음 $2a + b$, $a + 2b$ 의 대소를 비교하면?

① $2a + b < a + 2b$

② $2a + b \leq a + 2b$

③ $2a + b > a + 2b$

④ $2a + b \geq a + 2b$

⑤ $2a + b = a + 2b$

해설

$$(2a + b) - (a + 2b) = a - b > 0$$

$$\therefore 2a + b > a + 2b$$

2. $a > 0, b > 0$ 일 때, $\sqrt{2(a+b)}, \sqrt{a} + \sqrt{b}$ 의 대소를 바르게 나타낸 것은?

① $\sqrt{2(a+b)} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

② $\sqrt{2(a+b)} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

③ $\sqrt{2(a+b)} > \sqrt{a} + \sqrt{b}$

④ $\sqrt{2(a+b)} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

⑤ $\sqrt{2(a+b)} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

해설

$$\begin{aligned} & (\sqrt{2(a+b)})^2 - (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \\ &= 2(a+b) - (a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b) \\ &= a - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b \\ &= (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \\ & \text{(단, 등호는 } a = b \text{ 일 때 성립)} \end{aligned}$$

따라서 $\sqrt{2(a+b)} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

3. 두 양수 a, b 에 대하여 $\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{4}{a}\right)$ 의 최솟값은?

① 7

② 8

③ 9

④ 10

⑤ 11

해설

a, b 는 양수이므로

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{4}{a}\right) = ab + 4 + 1 + \frac{4}{ab}$$

$$= 5 + ab + \frac{4}{ab} \geq 5 + 2\sqrt{ab \cdot \frac{4}{ab}}$$

$$= 5 + 4 = 9$$

$\therefore$ 최솟값은 9

4. 실수 x, y 가 $x^2 + y^2 = 5$ 를 만족할 때, $x + 2y$ 의 최댓값 M , 최솟값 m 의 합 $M + m$ 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의해

$$(1^2 + 2^2)(x^2 + y^2) \geq (x + 2y)^2$$

$$(x + 2y)^2 \leq 5 \cdot 5$$

$$\therefore -5 \leq x + 2y \leq 5 \text{ 이므로}$$

$$x + 2y \text{의 최댓값 } M = 5, \text{ 최솟값 } m = -5$$

$$\therefore M + n = 5 + (-5) = 0$$

5. $x > y > 0$ 인 실수 x, y 에 대하여 $\frac{x}{1+x}, \frac{y}{1+y}$ 의 대소를 비교하면?

① $\frac{x}{1+x} < \frac{y}{1+y}$

② $\frac{x}{1+x} \leq \frac{y}{1+y}$

③ $\frac{x}{1+x} > \frac{y}{1+y}$

④ $\frac{x}{1+x} \geq \frac{y}{1+y}$

⑤ $\frac{x}{1+x} = \frac{y}{1+y}$

해설

$$A = \frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y} \text{ 이라하면}$$

$$A = \frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y} = \frac{x(1+y) - y(1+x)}{(1+x)(1+y)}$$

$$= \frac{x-y}{(1+x)(1+y)} > 0$$

$$\text{따라서 } \therefore \frac{x}{1+x} > \frac{y}{1+y}$$

6. 다음은 임의의 실수 a, b 에 대하여 $|a| + |b| \geq 0$, $|a + b| \geq 0$ 임을 증명하는 과정이다. [가]~[라]에 알맞은 것을 바르게 나타낸 것은?

$|a| + |b| \geq 0, |a + b| \geq 0$ 이므로 $(|a| + |b|)^2, |a + b|^2$ 의 대소를 비교하면 된다.

$$\begin{aligned} & (|a| + |b|)^2 - |a + b|^2 \\ &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a + b)^2 \\ &= a^2 + [\text{가}] + b^2 - (a^2 + [\text{나}] + b^2) \\ &= 2([\text{다}]) \geq 0 \\ &(\text{단, 등호는 } [\text{라}] \geq 0 \text{ 일 때 성립}) \end{aligned}$$

- ① 가: $|ab|$, 나: ab , 다: $2|ab| - 2ab$, 라: ab
 ② 가: $|ab|$, 나: ab , 다: $2|ab| - 2ab$, 라: $2ab$
 ③ 가: $2|ab|$, 나: $2ab$, 다: $|ab| - ab$, 라: ab
 ④ 가: $2|ab|$, 나: $2ab$, 다: $2|ab| - 2ab$, 라: ab
 ⑤ 가: $2|ab|$, 나: $2ab$, 다: $2|ab| - 2ab$, 라: $2ab$

해설

$$\begin{aligned} & (|a| + |b|)^2 - |a + b|^2 \\ &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a + b)^2 \\ &= a^2 + 2|ab| + b^2 - (a^2 + 2ab + b^2) \\ &= 2(|ab| - ab) \geq 0 \\ &(\text{단, 등호는 } ab \geq 0 \text{ 일 때 성립}) \end{aligned}$$

7. 자연수 n 에 대하여 2^{4n} , 3^{3n} 의 대소를 바르게 비교한 것은?

① $2^{4n} < 3^{3n}$

② $2^{4n} > 3^{3n}$

③ $2^{4n} \leq 3^{3n}$

④ $2^{4n} \geq 3^{3n}$

⑤ $2^{4n} = 3^{3n}$

해설

$$\frac{2^{4n}}{3^{3n}} = \left(\frac{2^4}{3^3}\right)^n = \left(\frac{16}{27}\right)^n < 1$$

$$\therefore 2^{4n} < 3^{3n}$$

8. 부등식 $|x + y| \leq |x| + |y|$ 에서 등호가 성립할 필요충분조건은?

① $x = y$

② $xy > 0$

③ $xy \geq 0$

④ $x \geq 0, y \geq 0$

⑤ $x \leq 0, y \leq 0$

해설

$|x + y| = |x| + |y|$ 의 양변을 제곱하여 정리하면

$$xy = |xy|$$

(i) $xy = |xy| \Rightarrow xy \geq 0$

(ii) 또 $xy > 0$ 이면 x, y 는 같은 부호이므로 등식이 성립한다.

$xy = 0$ 이면 등호가 성립한다.

따라서, $xy \geq 0 \Rightarrow xy = |xy|$

(i), (ii)에서

$$xy = |xy| \Leftrightarrow xy \geq 0$$

9. $a > b$, $x > y$ 일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $(a + b)(x + y) > 2(ax + by)$

② $(a + b)(x + y) < 2(ax + by)$

③ $(a + b)(x + y) \geq 2(ax + by)$

④ $(a + b)(x + y) \leq 2(ax + by)$

⑤ $(a + b)(x + y) = 2(ax + by)$

해설

$$\begin{aligned} & (a + b)(x + y) - 2(ax + by) \\ &= ay + bx - ax - by \\ &= a(y - x) - b(y - x) \\ &= (a - b)(y - x) \end{aligned}$$

그런데 $a - b > 0$, $y - x < 0$

$$\therefore (a + b)(x + y) < 2(ax + by)$$

10. 다음 중 옳은 것을 고르면?

- ① $a > 0, b > 0$ 이면 $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$
- ② 모든 실수 a, b 에 대하여 $|a| + |b| > a + b$
- ③ 모든 실수 a, b 에 대하여 $a^2 + b^2 > ab$
- ④ 모든 실수 a, b 대하여 $|a - b| \leq |a| - |b|$
- ⑤ $a > b > 0$ 일 때, $\sqrt{a-b} < \sqrt{a} - \sqrt{b}$

해설

① : $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$, 양변을 제곱하면

$$a + b + 2\sqrt{ab} > a + b$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{ab} > 0 \text{ (참)}$$

② ④ ⑤ : 모두 양변을 제곱하여 정리해 본다.

③ : (반례) $a = 0, b = 0$

11. 부등식 $2^{50} > 5^{10n}$ 을 만족하는 자연수 n 의 갯수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 2 개

해설

$$\frac{2^{50}}{5^{10n}} = \frac{(2^5)^{10}}{(5^n)^{10}} = \left(\frac{32}{5^n}\right)^{10}$$

이 때 $2^{50} > 5^{10n}$ 이므로 $\left(\frac{32}{5^n}\right) > 1$

$$\therefore n = 1, 2$$

n 의 갯수는 2 개이다.

12. 부등식 $3^{400} > 4^{100n}$ 을 만족시키는 자연수 n 의 개수는?

① 1개

② 2개

③ 3개

④ 4개

⑤ 5개

해설

$$\frac{3^{400}}{4^{100n}} = \frac{(3^4)^{100}}{(4^n)^{100}} = \left(\frac{81}{4^n}\right)^{100} > 1$$

$$3^{400} > 4^{100n} \text{ 이므로 } \frac{81}{4^n} > 1$$

$$\therefore n = 1, 2, 3$$

따라서 자연수 n 의 개수는 3 개이다.

13. 임의의 실수 a, b, c 에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

① $|a| = -a$

② $a > b > 0$ 일 때, $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 이다.

③ $|a| \geq 0$, $|a| \geq a$, $|a| = |-a|$ 이다.

④ $|a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|$

⑤ $|a - b| \geq |a| - |b|$

해설

① $|a| = a(a \geq 0)$

$-a(a < 0)$

② 참

③ 참

④ $(|a + b + c|)^2$

$= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$

$(|a| + |b| + |c|)^2$

$= a^2 + b^2 + c^2 + 2(|a||b| + |b||c| + |c||a|)$

$|a||b| \geq ab, |b||c| \geq bc, |c||a| \geq ca$

$\therefore |a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|$

⑤ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(|a| - |b|)^2 = a^2 - 2|a||b| + b^2$ ($\because |a||b| \geq ab$)

$\therefore |a - b| \geq |a| - |b|$

14. 다음은 임의의 실수 x, y 에 대하여 $|x| + |y| \geq |x - y|$ 가 성립함을 증명하는 과정이다. 과정에서 ㉠에 알맞은 것은?

증명

$$\begin{aligned} & (|x| + |y|)^2 - |x - y|^2 \\ &= |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 - (x - y)^2 \\ &= 2(|xy| + xy) \geq 0 \\ &\therefore (|x| + |y|)^2 \geq |x - y|^2 \\ &\text{그런데 } |x| + |y| \geq 0, |x - y| \geq 0 \text{ 이므로} \\ &|x| + |y| \geq |x - y| \text{ (단, 등호는 (㉠) 일 때, 성립)} \end{aligned}$$

① $xy > 0$

② $xy < 0$

③ $xy \geq 0$

④ $xy \leq 0$

⑤ $xy = 0$

해설

주어진 부등식에서

등호는 $|xy| + xy = 0$ 일 때, 성립한다.

$|xy| \geq 0$ 이므로

$|xy| + xy = 0$ 이려면 $xy \leq 0$

따라서 ㉠에 알맞은 것은 ④이다.

15. 모든 실수 x, y 에 대하여 $x^2 + 2axy + by^2 = 0$ 이 항상 성립하기 위한 실수 a, b 의 조건은?

① $a \leq b^2$

② $b^2 \leq a$

③ $a^2 \leq b$

④ $b \leq a^2$

⑤ $a^2 = b$

해설

모든 실수 x 에 대하여

$x^2 + 2axy + by^2 \geq 0$ 이 성립하려면

$$D/4 = (ay)^2 - by^2 = (a^2 - b)y^2 \leq 0$$

이 부등식이 모든 y 에 대하여 성립하려면

$$y^2 \geq 0 \text{ 이므로 } a^2 - b \leq 0$$

$$\therefore a^2 \leq b$$

16. 다음 [보기] 중 절대부등식인 것을 모두 고르면?(단, x, y 는 실수)

보기

㉠ $x^2 \geq 0$

㉡ $x^3 \geq 0$

㉢ $|x| + |y| > 0$

① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉠, ㉡

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ 항상 성립한다. $\therefore$ 참

㉡ [반례] $x = -1$ 일 때, $x^3 < 0 \therefore$ 거짓

㉢ [반례] $x = 0, y = 0$ 일 때, $|x| + |y| = 0 \therefore$ 거짓

17. 임의의 양의 실수 x, y 에 대하여 $A = \frac{x+y}{2}$, $G = \sqrt{xy}$, $H = \frac{2xy}{x+y}$ 라 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $G \geq A \geq H$

② $A \geq H \geq G$

③ $A \geq G \geq H$

④ $H \geq G \geq A$

⑤ $H \geq A \geq G$

해설

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x + y \geq 2\sqrt{xy}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

$$\therefore A \geq G \cdots \textcircled{\text{㉠}}$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x + y \geq 2\sqrt{xy}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{xy}(x+y) \geq 2xy$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{xy} \geq \frac{2xy}{x+y}$$

$$\therefore G \geq H \cdots \textcircled{\text{㉡}}$$

㉠, ㉡에 의하여 $A \geq G \geq H$

18. 서로 다른 두 양수 a, b 에 대하여 다음 중 옳은 것은? (단, $a \neq b$)

① $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$

② $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$

③ $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{2ab}{a+b}$

④ $\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab} \leq \frac{2ab}{a+b}$

⑤ $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$

해설

$a > 0, b > 0$ 일 때, 산술·기하·조화·평균의 관계에서

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b} \quad (\text{등호는 } a=b \text{ 일 때 성립})$$

그런데 문제의 조건에서 $a \neq b$ 이므로

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$$

19. 양수 x, y 에 대하여 $\left(x + \frac{3}{y}\right) \left(3y + \frac{1}{x}\right)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$x > 0, y > 0$ 이므로 산술기하평균의 관계에 의해

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= 3xy + 1 + 9 + \frac{3}{xy} \geq 2 \cdot \sqrt{3xy \cdot \frac{3}{xy}} + 10 \\ &= 2 \cdot 3 + 10 = 16\end{aligned}$$

20. $a > 0, b > 0$ 일 때, $(a+b) \left(\frac{4}{a} + \frac{9}{b} \right)$ 의 최솟값을 구하면?

① 13

② 24

③ 25

④ 28

⑤ 36

해설

$a > 0, b > 0$ 이므로 산술기하평균의 관계로부터

$$(a+b) \cdot \left(\frac{4}{a} + \frac{9}{b} \right) = 4 + \frac{9a}{b} + \frac{4b}{a} + 9$$

$$\frac{9a}{b} + \frac{4b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{9a}{b} \cdot \frac{4b}{a}} = 2 \cdot 6 = 12$$

$$\therefore (a+b) \left(\frac{4}{a} + \frac{9}{b} \right) \geq 12 + 13 = 25$$

21. $a > 0, b > 0, c > 0$ 일 때, $\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

산술-기하평균 부등식에 의해

$$\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{b}{a} \times \frac{c}{b} \times \frac{a}{c}} = 3$$

$$\therefore \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq 3$$

22. $a > 0, b > 0, c > 0$ 일 때, $\frac{2b}{a} + \frac{2c}{b} + \frac{2a}{c}$ 의 최소값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

산술-기하평균 부등식에 의해,

$$\frac{2b}{a} + \frac{2c}{b} + \frac{2a}{c} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{2b}{a} \times \frac{2c}{b} \times \frac{2a}{c}} = 3 \times 2 = 6$$

$$\therefore \frac{2b}{a} + \frac{2c}{b} + \frac{2a}{c} \geq 6$$

23. 길이가 10 인 쇄파이프를 n 등분 (같은 크기) 으로 잘라 다른 장소로 운반하려고 한다. 길이가 x 인 쇄파이프 1 개를 운반하는 데 드는 비용이 $250x^2$ 원이고 쇄파이프를 한 번 자를 때 드는 비용이 1000 원이라 할 때, 이 쇄파이프를 잘라서 운반하는 데 드는 최소비용은?

① 6000 원

② 7000 원

③ 8000 원

④ 9000 원

⑤ 10000 원

해설

쇄파이프 한 개의 길이 : $\frac{10}{n}$

$$(\text{총 비용}) = 250 \left(\frac{10}{n} \right)^2 \times n + 1000(n-1)$$

$$= \frac{25000}{n} + 1000n - 1000$$

$$\geq 2 \sqrt{\frac{25000}{n} \times 1000n} - 1000$$

$$= 2 \times 5000 - 1000$$

$$= 10000 - 1000 = 9000$$

24. 밑변의 길이와 높이의 길이의 곱이 8인 직각삼각형이 있다. 이 때 빗변의 길이의 최솟값과 그 때의 가로 길이를 합한 값은?

① $2\sqrt{2}$

② 4

③ $4\sqrt{2}$

④ 8

⑤ $8\sqrt{2}$

해설

밑변의 길이를 x , 높이를 y 라 하면

$$xy = 8 \cdots \textcircled{7}$$

피타고라스의 정리에 의하여 빗변의 길이는 $\sqrt{x^2 + y^2}$ 이다.

$x > 0, y > 0$ 이므로

산술평균과 기하평균에 의하여

$$x^2 + y^2 \geq 2\sqrt{x^2 \cdot y^2} = 2xy = 16$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{16} = 4$$

단, 등호는 $x^2 = y^2$ 즉 $x = y$ 일 때 성립한다.

$x = y$ 를 $\textcircled{7}$ 에 대입하면 $x^2 = 8$

따라서 $x = 2\sqrt{2}$ 이다.

$$4 \times 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

25. 부등식 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 24$ 를 만족시키는 실수 x, y, z 에 대하여 $x - 2y + 3z$ 의 최솟값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -12

해설

코시-슈바르츠 부등식을 이용하면

$$(x - 2y + 3z)^2$$

$$= \{x + \sqrt{2}(-\sqrt{2}y) + \sqrt{3}(\sqrt{3}z)\}^2$$

$$\leq \{1^2 + (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2\}$$

$$\{x^2 + (-\sqrt{2}y)^2 + (\sqrt{3}z)^2\}$$

$$= 6(x^2 + 2y^2 + 3z^2) \leq 144$$

$$\therefore -12 \leq x - 2y + 3z \leq 12$$

따라서, 구하는 최솟값은 -12이다.

$$(\text{참고}) \text{ 위의 부등식에서 } \frac{x}{1} = \frac{-\sqrt{2}y}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}z}{\sqrt{3}},$$

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 24$$

즉, $x = -y = \pm 2$ 일 때 등식이 성립한다.

26. 실수 x, y 가 $x^2 + y^2 = 5$ 를 만족할 때, $x + 2y$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 한다. 이 때, $M - m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의해

$$(1^2 + 2^2)(x^2 + y^2) \geq (x + 2y)^2$$

$x^2 + y^2 = 5$ 이므로

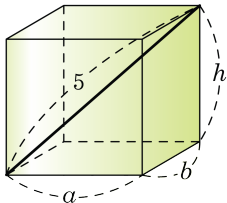
$$25 \geq (x + 2y)^2$$

$$\therefore -5 \leq x + 2y \leq 5$$

$$\therefore M = 5, m = -5$$

$$\therefore M - m = 5 - (-5) = 10$$

27. 코시-슈바르츠 부등식 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geq (ax+by+cz)^2$ 을 이용하여 가로, 세로, 높이가 각각 a, b, h 이고, 대각선의 길이가 5인 직육면체에서 모든 모서리의 길이의 합의 최댓값을 구하면?



- ① $5\sqrt{3}$ ② $4\sqrt{5}$ ③ $20\sqrt{3}$
 ④ $25\sqrt{5}$ ⑤ $24\sqrt{6}$

해설

$$a^2 + b^2 + h^2 = 25$$

코시-슈바르츠 부등식을 이용한다.

$$(a^2 + b^2 + h^2)(4^2 + 4^2 + 4^2) \geq (4a + 4b + 4h)^2$$

$$25 \cdot 48 \geq (4a + 4b + 4h)^2$$

$$\Rightarrow 4(a + b + h) \leq 5\sqrt{48} = 20\sqrt{3}$$

$\therefore$ 모서리의 길이의 합 $4(a + b + h)$ 의 최댓값
 $: 20\sqrt{3}$

28. 다음은 조화평균에 관한 어떤 수학적 사실을 증명한 것이다.

증명

양수 a, b, H 에 대하여

적당한 실수 r 가 존재하여

$$a = H + \frac{a}{r}, H = b + \frac{b}{r} \cdots (A) \text{가 성립한다고 하자.}$$

그러면 $a \neq b$ 이고 $\frac{a-H}{a} = \text{(가)} \cdots (B)$ 이므로

$H = \text{(나)}$ 이다.

역으로, $a \neq b$ 인 양수 a, b 에 대하여

$H = \text{(나)}$ 이면,

식 (B)가 성립하고 $\frac{a-H}{a} \neq 0$ 이다.

(B)에서 $\frac{a-H}{a} = \frac{1}{r}$ 이라 놓으면

식 (A)가 성립한다. 따라서 양수 a, b, H 에 대하여 적당한 실수 r 이 존재하여

식 (A)가 성립하기 위한 (다) 조건은

$a \neq b$ 이고 $H = \text{(나)}$ 이다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞는 것을 순서대로 적으면?

① $\frac{H-b}{b}, \frac{2ab}{a+b}, \text{필요충분}$

② $\frac{H-b}{b}, \frac{ab}{a+b}, \text{필요충분}$

③ $\frac{H-b}{b}, \frac{2ab}{a+b}, \text{충분}$

④ $\frac{b-H}{b}, \frac{2ab}{a+b}, \text{필요}$

⑤ $\frac{b-H}{b}, \frac{ab}{a+b}, \text{충분}$

해설

$$a = H + \frac{a}{r} \text{에서 } \frac{r}{1} = \frac{a-H}{a}$$

$$H = b + \frac{b}{r} \text{에서 } \frac{r}{1} = \frac{H-b}{b}$$

$$\therefore \frac{a-H}{a} = \text{(가)} \frac{H-b}{b}$$

$$ab - bH = aH - ab \text{이므로 } H = \text{(나)} \frac{2ab}{a+b}$$

따라서 (다) 필요충분조건

29. 공항에서 출국시에 통과되지 않은 물건을 소유하고 있을 때는 경고음이 울리게 되어 있다. 1건 적발될 때마다 출국 심사 시간은 x 분씩 늘어나며 y 명의 사람들이 심사를 받기 위해 줄을 서서 기다리고 있다. 기본 심사 시간은 한 사람 당 2분이며 10건이 적발되었다고 할 때, 1시간 이내에 심사를 마치기 위한 xy 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 45

해설

10건이 적발되었으므로 늘어난 심사 시간은 $10x$,
 y 명이 기다리고 있으므로 기본 심사 시간은 $2y$ 분이다.

시간이내에 심사를 끝내야 하므로

$$10x + 2y \leq 60 \cdots \textcircled{A}$$

$x > 0, y > 0$ 이므로

산술평균, 기하평균에 의하여

$$10x + 2y \geq 2\sqrt{10x \cdot 2y}$$

$$10x + 2y \geq 2\sqrt{20xy} \cdots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 에 의하여

$$2\sqrt{20xy} \leq 60, 20xy \leq 900$$

$$\therefore xy \leq 45$$

따라서 xy 의 최댓값은 45이다.

30. $x + y + z = 4, x^2 + y^2 + z^2 = 6$ 을 만족하는 실수 x, y, z 에 대하여 x 가 취할 수 있는 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $\frac{M}{m}$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$x + y + z = 4 \text{에서 } y + z = 4 - x \cdots \textcircled{㉠}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 6 \text{에서 } y^2 + z^2 = 6 - x^2 \cdots \textcircled{㉡}$$

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(1^2 + 1^2)(y^2 + z^2) \geq (y + z)^2$$

(단, 등호는 $y = z$ 일 때 성립)

①, ②을 대입하면

$$2(6 - x^2) \geq (4 - x)^2, 3x^2 - 8x + 4 \leq 0$$

$$(3x - 2)(x - 2) \leq 0 \quad \therefore \frac{2}{3} \leq x \leq 2$$

$$\text{따라서 } M = 2, m = \frac{2}{3} \text{이므로 } \frac{M}{m} = 3$$

31. 다음의 I, II에서 p 가 q 이기 위한 충분조건이면 1, 필요조건이면 3, 필요충분조건이면 7, 아무 조건도 아니면 0의 값을 주기로 하자.

I. $p : ab < 0$

q : 두 부등식 $a > b$, $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ 이 동시에 성립한다.

II. $p : a + b - 1 < 0$

q : 이차방정식 $x^2 - ax - b = 0$ 이 허근을 갖는다.

a, b 가 실수일 때, I, II에 주어지는 두 값의 합을 구하시오.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

I. q 의 두 부등식이 동시에 성립하기 위해서는

$$a - b > 0 \text{ 이고 } \frac{1}{a} - \frac{1}{b} > 0$$

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab} > 0 \text{ 에서 } ab < 0 \text{ 이고}$$

$a > b$ 이므로

$$a > 0, b < 0$$

역으로, $a > 0, b < 0$ 이면 $a > b$ 이고

$$\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

즉, 두 부등식이 동시에 성립하기 위한 필요충분조건은 $a > 0, b < 0$ 이다.

그런데 $ab < 0 \Leftrightarrow (a < 0, b > 0)$ 또는 $(a > 0, b < 0)$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

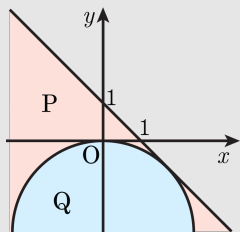
II. 이차방정식 $x^2 - ax - b = 0$ 이 허근을 갖기 위한 필요충분조건은

$$D = a^2 + 4b < 0, P = \{(a, b) | a + b - 1 < 0\}$$

$Q = \{(a, b) | a^2 + 4b < 0\}$ 라 놓고 두 집합을 좌표평면에 나타내면 다음 그림과 같다. 즉, $Q \subset P$

따라서, p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

따라서, 구하는 두 값의 합은 6이다.



32. 세 양수 x, y, z 가 $x + y + z = 1$ 을 만족할 때,
 $\left(2 + \frac{1}{x}\right) \left(2 + \frac{1}{y}\right) \left(2 + \frac{1}{z}\right)$ 의 최소값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 125

해설

$$\begin{aligned}
 (\text{준식}) &= 8 + 4 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \\
 &\quad + 2 \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \right) + \frac{1}{xyz} \\
 \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} &= \frac{x+y+z}{xyz} = \frac{1}{xyz} \text{ 이므로}
 \end{aligned}$$

$$(\text{준식}) = 8 + 4 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) + \frac{3}{xyz}$$

$$x + y + z = 1 \text{ 이므로}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{x+y+z}{3} \geq 3\sqrt{xyz}$$

$$\left(\text{등호는 } x = y = z = \frac{1}{3} \text{ 일 때 성립} \right)$$

$$\therefore xyz \leq \frac{1}{27} \quad \therefore \frac{1}{xyz} \geq 27 \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{3}{3\sqrt{xyz}} \geq 9 \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{ 에서 } (\text{준식}) \geq 8 + 36 + 81 = 125$$

33. 1, 3, 5, 7, 9를 임의로 순서를 바꾸어 배열한 수열을 a, b, c, d, e 라고 할 때, $a + 3b + 5c + 7d + 9e$ 의 최솟값은?

① 83

② 85

③ 87

④ 89

⑤ 91

해설

$$a + 3b + 5c + 7d + 9e$$

$$= (10 - 9)a + (10 - 7)b + (10 - 5)c + (10 - 3)d + (10 - 1)e$$

$$= 10(a + b + c + d + e) - (9a + 7b + 5c + 3d + e)$$

$$= 10 \times 25 - (9a + 7b + 5c + 3d + e)$$

여기서 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$(9^2 + 7^2 + 5^2 + 3^2 + 1^2)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2) \geq (9a + 7b + 5c + 3d + e)^2$$

$$(9a + 7b + 5c + 3d + e) \leq (1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2) \text{ 이고}$$

$$\text{등호는 } \frac{a}{9} = \frac{b}{7} = \frac{c}{5} = \frac{d}{3} = \frac{e}{1} \text{ 일 때, 성립한다.}$$

$$\therefore a + 3b + 5c + 7d + 9e \geq 10 \times 25 - (1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2) = 250 - (165) = 85$$

따라서, $a = 9, b = 7, c = 5, d = 3, e = 1$ 일 때, 준식은 최솟값 85를 갖는다.

해설

a, b, c, d, e 가 자연수이므로

$a = 9, b = 7, c = 5, d = 3, e = 1$ 일 때

준식은 최소가 된다.