1. 집합 $A = \{x \mid x\text{는 5의 약수}\}$ 일 때, 다음 중에서 옳지 <u>않은</u> 것을 모두 찾아라.

㉠ $1 \in A$	㉡ $3 \in A$
㉢ $4 \notin A$	㉣ $12 \in A$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉡

▷ 정답 : ㉣

해설

5의 약수는 1, 5이다.

2. 집합 $A = \{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$ 일 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $3 \in A$

② $\varnothing \in A$

③ $\{5,\ 13\} \not\subset A$

④ $\{2,\ 3,\ 5,\ 7\} \subset A$

⑤ $A = \{x \mid x$는 10보다 작은 소수$\}$

해설

$\varnothing \subset A$

3. 집합 $A = \left\{x \middle| x\text{는 } 18\text{의 약수}\right\}$ 일 때, 공집합이 아닌 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ________ 개

▷ 정답 : 63 개

해설

$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9,\ 18\}$

전체 부분집합의 개수 : $2^6 = 64$

$64 - 1$(공집합의 개수) $= 63$

4. $A = \{a, b, c, d, e\}$에서 원소 a를 포함하고 b는 포함하지 않은 부분집합의 개수는?

① 4개 ② 7개 ③ 8개 ④ 9개 ⑤ 16개

해설

$2^{5-1-1} = 2^3 = 8$(개)

5. 두 집합 $A=\{7,\ 3,\ 5\}$, $B=\{3,\ 5,\ a+2\}$에 대하여 $A=B$일 때, a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$A=B$이면 두 집합의 모든 원소가 같아야 한다.
집합 B에서 $a+2=7$이므로 $a=5$이다.

6. 두 집합 $C = \{x \mid x$는 12의 약수$\}$, $D = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ 일 때, $D - C$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\{6,\ 12\}$

해설

$C = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$, $D \cap C = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

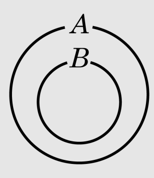
$D - C = D - (D \cap C) = \{6,\ 12\}$

7. 전체집합 U 의 공집합이 아닌 두 부분집합 A, B 에 대하여 $B \subset A$ 일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

① $A \cap B = \varnothing$　② $A \cup B = U$　③ $B - A = \varnothing$
④ $A - B = \varnothing$　⑤ $A \cap B^c = \varnothing$

해설

$B \subset A$ 이면, 집합 A, B 는 다음 벤 다이어그램과 같은 포함관계를 만족한다.



① $A \cap B = B$
② $A \cup B = A$
④ $A - B \neq \varnothing$
⑤ $A \cap B^c \neq \varnothing$

8. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 의 두 부분집합 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $B = \{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$에 대하여 $A^c \cap B^c$를 구하면?

① $\{1,\ 3\}$　② $\{2,\ 4\}$　③ $\{3,\ 5\}$　④ $\{4,\ 8\}$　⑤ $\{6,\ 8\}$

해설

$A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7\}$이고 $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = U - (A \cup B) = \{6,\ 8\}$

9. 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $n(A) = 24$, $n(B) = 32$, $n(A \cup B) = 41$일 때, $n(A \cap B)$ 의 값을 구하면?

① 12　② 13　③ 14　④ 15　⑤ 16

해설

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$$
$$= 24 + 32 - 41 = 15$$

10. 명제 'x 가 4의 배수이면 x 는 2의 배수이다' 의 대우는?

① x 가 2의 배수이면 x 는 4의 배수이다.
② x 가 2의 배수이면 x 는 4의 배수가 아니다.
③ x 가 4의 배수이면 x 는 2의 배수가 아니다.
④ x 가 4의 배수가 아니면 x 는 2의 배수가 아니다.
⑤ x 가 2의 배수가 아니면 x 는 4의 배수가 아니다.

해설
$p \to q$ 의 대우는 $\sim q \to \sim p$

11. 다음 글은 청산이네 반의 학급회의 기록이다. 밑줄 친 내용 중 집합인 것의 번호를 고르면?

> 교내 체육 대회 때 장애물 달리기 선수는 ① 키가 작은 학생, 릴레이 선수는 ② 빠른 학생, 응원단장은 ③ 목소리가 큰 학생, 배구선수는 ④ 키가 큰 학생이 하기로 한다. 그리고, 줄다리기는 ⑤ 학급인원 전체가 참석하기로 한다.

① 키가 작은 학생 ② 빠른 학생

③ 목소리가 큰 학생 ④ 키가 큰 학생

⑤ 학급인원 전체

해설

⑤ 학급인원 전체가 집합이다.

12. 다음 중 유한집합인 것을 모두 골라라.

㉠ $\{x \mid x$는 자연수$\}$

㉡ $\{x \mid x$는 가장 작은 자연수$\}$

㉢ $\{x \mid 0 < x < 1,\ x$는 자연수$\}$

㉣ $\{1, 2, 3, 4, 6, 12, 24\}$

㉤ $\{x \mid x$는 1보다 작은 수$\}$

㉥ $\{x \mid x$는 100보다 작은 2의 배수$\}$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉡

▷ 정답 : ㉢

▷ 정답 : ㉣

▷ 정답 : ㉥

해설

㉠ $\{1, 2, 3, \cdots\}$ 이므로 무한집합이다.
㉡ 가장 작은 자연수는 1이므로 유한집합이다.
㉢ 0과 1 사이에 자연수는 존재하지 않으므로 공집합 즉, 유한집합이다.
㉣ 유한집합
㉤ 1보다 작은 수는 $0, -1, -\frac{1}{2}, \cdots$ 등 무수히 많이 존재하므로 무한집합이다.
㉥ $\{2, 4, 6, 8, \cdots, 96, 98\}$ 이므로 유한집합이다.

13. $A=\{x \mid x$는 16의 약수$\}$, $B=\{2,\ 4,\ 7,\ 9,\ 10\}$ 일 때, $n(A)+n(B)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$A=\{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16\}$ 이므로 $n(A)=5$

$\therefore\ n(A)+n(B)=5+5=10$

14. 집합 $\mathrm{A} = \{\varnothing,\ 1,\ \{1\}\}$ 일 때, 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $\varnothing \in \mathrm{A}$　　② $\varnothing \subset A$　　③ $1 \in \mathrm{A}$

④ $\{1\} \subset \mathrm{A}$　　⑤ $\{\varnothing\} \in \mathrm{A}$

해설

⑤가 성립되려면 기호가 $\subset$ 으로 바뀌어야 한다.

15. 집합 $X = \{x \mid x\text{는 } 4\text{의 약수}\}$ 의 부분집합 중에서 그 원소의 개수가 2 개인 것의 개수를 구하면?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$X = \{1,\ 2,\ 4\}$
원소의 개수가 2 개인 X 의 부분집합 :
$\{1,\ 2\},\ \{1,\ 4\},\ \{2,\ 4\}$

16. 다음 설명 중 <u>틀린</u> 것은 ?

① 임의의 집합 A 는 자신의 집합 A 의 부분집합이다.

② 공집합은 임의의 집합의 부분집합이다.

③ 공집합은 공집합의 부분집합이다.

④ 임의의 집합 A 에 대하여 $2^A = \{X \mid X \subset A\}$ 로 정의할 때, $A \subset 2^A$ 이다.

⑤ 집합 A, B 에 대하여 $A - B = \varnothing$ 이면 $A \subset B$ 이다.

해설

③ $\varnothing$ 의 부분집합은 $\varnothing$

④ 예를 들어 $A \in 2^A$, $\{A\} \subset 2^A$, $A = \{1,\ 2\}$ 일 때
$2^A = \{\varnothing,\ \{1\},\ \{2\},\ A\} \rightarrow \varnothing \in 2^A$
$\varnothing \subset 2^A$, $\{\varnothing\} \subset 2^A$, $A \in 2^A$, $\{A\} \subset 2^A$

17. $\{a\} \subset X \subset \{a,\ b,\ c\}$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는?

① 2 개 ② 3 개 ③ 4 개 ④ 5 개 ⑤ 6 개

해설

집합 X 는 a 를 반드시 원소로 가지는 $\{a,\ b,\ c\}$ 의 부분집합이므로 개수는 $2^2 = 4$ (개)

18. 다음에서 두 집합 A, B가 서로소인 것을 고르면?

① $A=\{1,\ 2,\ 3\}$, $B=\{x \mid x$는 5보다 작은 소수$\}$

② $A=\{x \mid x \geq 1$인 실수$\}$, $B=\{x \mid x \leq 1$인 실수$\}$

③ $A=\{1,\ 2,\ 3\}$, $B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$

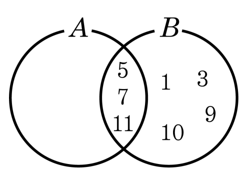
④ $A=\{3,\ 4,\ 5\}$, $B=\{x \mid x$는 $-1<x \leq 3$인 정수$\}$

⑤ $A=\{x \mid x=2n+1, n$은 자연수$\}$,
$B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$

해설

$A=\{x \mid x=2n+1,\ n$은 자연수$\}$
$=\{3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \cdots\}$

19. 다음 벤 다이어그램에서 $B = \{1,3,5,7,9,10,11\}$, $A \cap B = \{5,7,11\}$ 일 때, 다음 중 집합 A가 될 수 있는 것은?



① $\{2,3,5,7,9,11\}$ ② $\{5,6,7,9,10,11\}$

③ $\{2,3,5,6,7,8,11\}$ ④ $\{2,4,5,7,11,12\}$

⑤ $\{1,4,5,9,10\}$

해설

집합 B 는 반드시 $A \cap B = \{5,7,11\}$ 을 포함하여야 하며 B 집합에만 존재하는 원소 $1,3,9,10$ 은 들어갈 수 없다.
① $3,9$ 이 포함되어서 옳지 않다.
② $9,10$ 이 포함되어서 옳지 않다.
③ 3 이 포함되어서 옳지 않다.
⑤ $1,9,10$ 이 포함되어서 옳지 않다.

20. 두 집합 A, B 에 대하여 옳지 <u>않은</u> 것을 모두 고른 것은?

㉠ $(A \cap B) \subset (A \cup B)$	㉡ $\varnothing \cap A = A$
㉢ $B \subset (A \cap B)$	㉣ $B \cup \varnothing = \varnothing$

① ㉢,㉣　② ㉡,㉢　③ ㉠,㉣
④ ㉡,㉢,㉣　⑤ ㉠,㉡,㉢

해설

㉡$A \cap \varnothing = \varnothing$
㉢$B \subset (A \cup B)$
㉣$B \cup \varnothing = B$

21. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$ 에 대하여 $A \cup X = A$, $(A \cap B) \cup X = X$ 를 만족시키는 집합 X 의 개수를 구하면?

① 2 개　② 4 개　③ 8 개　④ 16 개　⑤ 32 개

해설

$A \cup X = A$ 이면 $X \subset A$,
$(A \cap B) \cup X = X$ 이면 $(A \cap B) \subset X$
$\therefore\ (A \cap B) \subset X \subset A$
$A \cap B = \{3, 4, 5\}$ 이므로 집합 X 는 3, 4, 5 를 포함하는 집합 A 의 부분집합이므로 그 개수는 $2^2 = 4$ (개)

22. 두 집합 A, B가 $n(A)=17$, $n(A\cap B)=6$, $n(A\cup B)=29$일 때, 집합 B의 원소의 개수를 구하여라.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 18 개

해설

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$17+n(B)-6=29$

$n(B)=29-17+6=18$ 이다.

따라서 $n(B)=18$ 이다.

23. 우리 반에서 발야구가 취미인 학생이 17 명, 컴퓨터 게임이 취미인 학생이 18 명이다. 또 , 두 가지 전부 취미인 학생이 7 명이다. 이때, 우리 반 학생 가운데 발야구나 컴퓨터 게임이 취미인 학생은 몇 명인지 구하여라.

▶ 답 : 명

▷ 정답 : 28 명

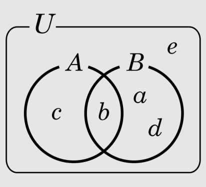
해설
발야구가 취미인 학생을 집합 A 라 하고, 컴퓨터 게임이 취미인 학생을 B 라고 하자.
그렇다면 발야구, 컴퓨터 게임 모두 취미인 학생은 $A \cap B$ 가 된다.
발야구나 컴퓨터 게임이 취미인 학생, 즉 $A \cup B$ 를 구하는 것이다.
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
$x = 17 + 18 - 7$
그러므로 x 는 28 이다.

24. 전체집합 $U = \{a, b, c, d, e\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{b\}, B - A = \{a, d\}, (A \cup B)^c = \{e\}$ 일 때, $A - B$ 는?

① $\{a\}$ ② $\{c\}$ ③ $\{a, d\}$ ④ $\{b, c\}$ ⑤ $\{b, e\}$

해설

주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같으므로 $A - B = \{c\}$ 이다.



25. 통일고등학교에서 50 명 학생을 대상으로 수학, 영어에 대한 흥미도를 조사한 결과를 수학을 좋아하는 학생은 32 명, 영어를 좋아하는 학생은 27 명이었고 수학과 영어를 모두 좋아하는 학생은 13 명이었다. 그렇다면 수학과 영어를 모두 싫어하는 학생은 몇 명인지 구하여라.

▶ 답 : ______ 명

▷ 정답 : 4 명

해설

수학 : A , 영어 : B , 전체 : U

$n(A) = 32, n(B) = 27, n(A \cap B) = 13$

$n(A \cup B) = 32 + 27 - 13 = 46$

$\therefore n(A^c \cap B^c) = n((A \cup B)^c)$

$= n(U) - n(A \cup B) = 50 - 46 = 4$

$\therefore$ 4명

26. 부등식 $|x+y| \le |x|+|y|$ 에서 등호가 성립할 필요충분조건은?

① $x=y$　　② $xy>0$　　③ $xy \ge 0$

④ $x \ge 0,\ y \ge 0$　　⑤ $x \le 0,\ y \le 0$

해설

$|x+y| = |x|+|y|$ 의 양변을 제곱하여 정리하면

$xy = |xy|$

(i) $xy = |xy| \quad \Rightarrow \quad xy \ge 0$

(ii) 또 $xy > 0$ 이면 $x,\ y$ 는 같은 부호이므로 등식이 성립한다.

$xy = 0$ 이면 등호가 성립한다.

따라서, $xy \ge 0 \quad \Rightarrow \quad xy = |xy|$

(i), (ii) 에서

$xy = |xy| \Leftrightarrow xy \ge 0$

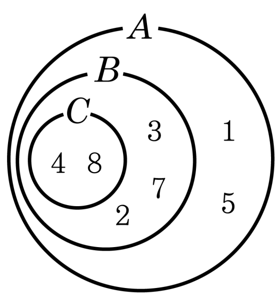
27. a, b, x y가 실수이고, $a^2 + b^2 = 8, x^2 + y^2 = 2$일 때 $ax + by$의 최댓값과 최솟값의 곱은?

① -16　② -4　③ 0　④ 4　⑤ 16

해설

a, b, x, y가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$
$8 \times 2 \geq (ax + by)^2$
$\therefore -4 \leq ax + by \leq 4$
(최댓값) $\times$(최솟값)$= -16$

28. 다음 벤 다이어그램을 보고, $C \subset X \subset A$를 만족하는 집합 X가 될 수 있는 것을 다음 중 찾고 집합 앞에 있는 단어를 이용해서 단어를 만들어라.



(구) $\{1, 2, 8\}$ (부) $\{3, 4, 8\}$ (수) $\{3, 5, 8\}$ (학) $\{1, 4, 6, 7\}$ (분) $\{4, 5, 7, 8\}$ (합) $\{2, 3, 4, 8\}$ (집) $\{2, 4, 7, 8\}$ (직) $\{1, 2, 3, 6, 8\}$

▶ 답 :

▷ 정답 : 부분집합

해설

집합 C와 집합 A를 원소 나열법으로 각각 나타내면 $C = \{4, 8\}, A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$이다. $C \subset X \subset A$를 만족하는 집합 X는 집합 A의 부분집합 중 원소 4, 8을 반드시 포함하는 부분집합 이다. 따라서 집합 X가 될 수 있는 집합은 $\{3, 4, 8\}, \{4, 5, 7, 8\}, \{2, 3, 4, 8\}, \{2, 4, 7, 8\}$이고 만들 수 있는 단어는 '부분집합' 이다.

29. x, y, z 가 실수일 때, 조건 $(x-y)^2+(y-z)^2=0$ 의 부정과 동치인 것은?

① $(x-y)(y-z)(z-x) \neq 0$

② x, y, z 는 서로 다르다.

③ $x \neq y$ 이고 $y \neq z$

④ $(x-y)(y-z)(z-x) > 0$

⑤ x, y, z 중에 적어도 서로 다른 것이 있다.

해설

$(x-y)^2+(y-z)^2=0$ 이면 $x=y=z$ 이므로 이것의 부정은
$x \neq y$ 또는 $y \neq z$ 또는 $z \neq x$
즉, x, y, z 중에 적어도 서로 다른 것이 있다.

30. 다음 명제 중 참인 것은? (단, x, y, z 는 실수이다.)

① $xz = yz$ 이면 $x = y$ 이다.

② $x + y > 0$, $xy > 0$ 이면 $x > 0$ 이고 $y > 0$ 이다.

③ x 가 3 의 배수이면 x 는 9 의 배수이다.

④ $x^2 + y^2 \neq 0$ 이면 $x \neq 0$ 이고 $y \neq 0$ 이다.

⑤ 삼각형 ABC 가 이등변삼각형이면 정삼각형이다.

해설

② $xy > 0$ 이면, x 와 y 의 부호가 같다는 것인데 $x + y > 0$ 이려면 둘 다 양수여야 하므로 참이다.

31. 다음 두 조건 p, q를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라고 할 때, $Q^c \subset P^c$ 인 경우는?

① $p : x \le 1$
$q : \ x \ \le 1$

② $p : x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$
$q : x = 1$

③ $p : a > 0, b > 0$
$q : a^2 + b^2 \ge 2a - 1$

④ $p : x$ 가 3의 배수
$q : x$ 는 9의 배수

⑤ $p : x^2 - 1 = 0$
$q : (x+1)^2 = 0$

해설

$Q^c \subset P^c$, $P \subset Q$
① $Q \subset P$
② $Q \subset P$
④ $Q \subset P$
⑤ $Q \subset P$
③ $q : a^2 + b^2 \ge 2a - 1 \rightarrow a^2 - 2a + 1 + b^2 \ge 0 \rightarrow (a-1)^2 + b^2 \ge 0$
$\rightarrow a,\ b$ 는 모든 실수

32. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 $\sim p \Rightarrow \sim q, r \Rightarrow q, \sim r \Rightarrow s$ 일 때, 다음 중 항상 옳은 것을 <u>모두</u> 고르면?

① $r \Rightarrow p$ ② $\sim p \Rightarrow \sim s$ ③ $\sim s \Rightarrow \sim r$

④ $r \Rightarrow \sim s$ ⑤ $\sim q \Rightarrow s$

해설

$\sim p \Rightarrow \sim q, r \Rightarrow q, \sim r \Rightarrow s$의 각각의 대우는 $q \Rightarrow p, \sim q \Rightarrow \sim r, \sim s \Rightarrow \sim r$

따라서 $\sim p \Rightarrow \sim q \Rightarrow \sim r \Rightarrow s, r \Rightarrow q \Rightarrow p$ 이므로 $\sim q \Rightarrow s, r \Rightarrow p$

33. 다음 (　　　)에 「필요, 충분, 필요충분」 중에서 알맞은 것을 차례대로 써 넣어라.

$x = 2$ 는 $x^2 = 4$ 이기 위한 (　　　)조건이다 평행사변형은 직사각형이기 위한 (　　　)조건이다.

▶ 답 : 　　　　　　　　조건

▶ 답 : 　　　　　　　　조건

▷ 정답 : 충분조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

$x = 2$ 는 $x^2 = 4$ 이기 위한 충분 조건이다. 평행사변형은 직사각형이기 위한 필요 조건이다.

34. p : $-1 \le x \le 1$ 또는 $x \ge 3$, q : $x \ge a$ 에 대하여 q 는 p 이기 위한 필요조건일 때, 정수 a 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
q 는 p 이기 위한 필요조건이므로 $P \subset Q$ 이다.
$\therefore\ a \le -1$
따라서 a 의 최댓값은 -1 이다.

35. 다음은 $|a| < 1$, $|b| < 1$, $|c| < 1$ 일 때 부등식 $abc + 2 > a + b + c$ 가 성립함을 증명한 것이다. ㉠, ㉡, ㉢에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

$$abc + 2 > a + b + c$$
$$= abc + 1 + 1 - a - b - c$$
$$= (1 - ab)(1 - c) + (㉠)$$

$|a| < 1$ 이므로 $(㉡) < 1 - a < (㉢)$
같은 방법으로 $(㉡) < 1 - b < (㉢)$,
$(㉡) < 1 - c < (㉢)$
또한 $|ab| < 1$ 이므로 $(㉡) < 1 - ab < (㉢)$
따라서 $abc + 2 - (a + b + c) = (1 - ab)(1 - c) + (㉠) > (㉡)$
이므로 $abc + 2 > a + b + c$

① $(1 + a)(1 + b), 0, 2$
② $(1 - a)(1 + b), 0, 2$
③ $(1 + a)(1 + b), -1, 1$
④ $(1 - a)(1 - b), 0, 2$
⑤ $(1 - a)(1 - b), -1, 1$

해설

$$abc + 2 > a + b + c = abc + 1 + 1 - a - b - c$$
$$= abc - ab - c + 1 + 1 + ab - a - b$$
$$= (1 - ab)(1 - c) + (1 - a)(1 - b)$$

$|a| < 1$ 이므로 $-1 < a < 1$ 이므로 $0 < 1 - a < 2$
$|b| < 1$ 이므로 $-1 < b < 1$ 이므로 $0 < 1 - b < 2$
$|c| < 1$ 이므로 $-1 < c < 1$ 이므로 $0 < 1 - c < 2$
또한 $|ab| < 1$ 이므로 $0 < 1 - ab < 2$
따라서 $abc + 2 - (a + b + c)$
$= (1 - ab)(1 - c) + (1 - a)(1 - b) > 0$
이므로 $abc + 2 > a + b + c$

36. 다음 [보기] 중에 x에 대한 절대부등식인 것을 모두 고른 것은? (단, x는 실수이다.)

보기

㉠ $x+1>0$	㉡ $x^2-2x+1\ge 0$
㉢ $x^2<x+12$	㉣ $x^2+1>x$

① ㉡　② ㉠, ㉢　③ ㉡, ㉢
④ ㉡, ㉣　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$
㉡ $x^2-2x+1\ge 0 \Leftrightarrow (x-1)^2\ge 0$
$\Leftrightarrow$ x는모든실수(절대부등식)

㉢ $x^2<x+12 \Leftrightarrow x^2-x-12<0$
$\Leftrightarrow (x+3)(x-4)<0$
$\Leftrightarrow -3<x<4$

㉣ $x^2+1>x \Leftrightarrow x^2-x+1>0$
$\Leftrightarrow \left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+1-\frac{1}{4}>0$
$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$
$\Leftrightarrow$ x는모든실수(절대부등식)

37. $a>0,\ b>0$일 때, $(2a+b)\left(\frac{8}{a}+\frac{1}{b}\right)$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 25

해설

$(2a+b)\left(\frac{8}{a}+\frac{1}{b}\right)=16+1+\frac{8b}{a}+\frac{2a}{b}$

$a>0,\ b>0$이므로 $\frac{8b}{a}+\frac{2a}{b}\geq 2\sqrt{\frac{8b}{a}\cdot\frac{2a}{b}}=8$

$\therefore$ 최솟값은 $17+8=25$

38. $a>0$, $b>0$, $c>0$일 때, $\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

산술-기하평균 부등식에 의해

$\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{b}{a}\times\frac{c}{b}\times\frac{a}{c}}=3$

$\therefore \frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c} \geq 3$

39. 빗변의 길이가 5 인 직각삼각형 중에서 넓이가 최대가 되는 삼각형의 넓이와 그 때 삼각형의 둘레의 길이를 더하면?

① $\frac{25}{4}$ ② $5+5\sqrt{2}$ ③ 25

④ $\frac{25}{4}+\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{45}{4}+5\sqrt{2}$

해설

밑변과 높이를 각각 $a,\ b$라 하면

$a^2+b^2=25$ 이고

$a^2+b^2 \geq 2ab$ 에서 $25 \geq 2ab$

$\therefore \frac{1}{2}ab \leq \frac{25}{4}$ 이므로

삼각형의 넓이의 최댓값은 $\frac{25}{4}$ 이고

$a=b=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ 일 때

둘레의 길이는 $5+5\sqrt{2}$

40. 두 실수 x, y의 제곱의 합이 10일 때, $x+3y$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 한다. 이 때, $M-m$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 20

해설

코시-슈바르츠 부등식에 의해

$(1^2+3^2)(x^2+y^2) \geq (x+3y)^2$

$x^2+y^2=10$이므로 $100 \geq (x+3y)^2$

$\therefore\ -10 \leq x+3y \leq 10$

$\therefore\ M=10,\ m=-10$

$\therefore\ M-m=10-(-10)=20$

41. 집합 $M = \{a+bi | a^2+b^2=1,\ a,\ b\text{는 실수}\}$ 에 대하여 <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면?(단, $i = \sqrt{-1}$)

보기

ㄱ $z_1 \in M,\ z_2 \in M$ 이면 $z_1 + z_2 \in M$

ㄴ $z_1 \in M,\ z_2 \in M$ 이면 $z_1 z_2 \in M$

ㄷ $z_1 \in M,\ z_2 \in M$ 이면 $\dfrac{z_1}{z_2} \in M$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

$z_1 = a+bi \in M$, $z_2 = c+di \in M$ 이라 하자.

ㄱ $z_1 + z_2 = a+bi+c+di = (a+c)+(b+d)i$ 에서

$$(a+c)^2+(b+d)^2$$
$$= a^2+2ac+c^2+b^2+2bd+d^2$$
$$= 2+2(ac+bd)\text{이므로}$$

$2+2(ac+bd) \neq 1$ 일수 있으므로 $z_1 + z_2 \in M$ 이라 할 수 없다.

ㄴ $z_1 \cdot z_2 = (a+bi)(c+di)$

$$= ac+adi+bci-bd$$
$$= (ac-bd)+(ad+bc)i\text{에서}$$

$$(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$$
$$= a^2c^2-2abcd+b^2d^2+a^2d^2+2abcd+b^2c^2$$
$$= a^2c^2+a^2d^2+b^2d^2+b^2c^2$$
$$= a^2(c^2+d^2)+b^2(c^2+d^2) = a^2+b^2 = 1\ (\because c^2+d^2=1\ )$$

$\therefore\ z_1 \cdot z_2 \in M$

ㄷ $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a+bi}{c+di}$

$$= \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}$$
$$= \frac{ac-adi+bci+bd}{c^2+d^2}$$
$$= (ac+bd)+(bc-ad)i$$

$(\because c^2+d^2=1)$에서

$$(ac+bd)^2+(bc-ad)^2$$
$$= a^2c^2+2abcd+b^2d^2+b^2c^2-2abcd+a^2d^2$$
$$= a^2c^2+b^2c^2+b^2d^2+a^2d^2 = (a^2+b^2)c^2+(a^2+b^2)d^2$$
$$= c^2+d^2 = 1$$

$\therefore\ \dfrac{z_1}{z_2} \in M$

42. 집합 $A = \{x \mid x\text{는 } n\text{보다 큰 } 3\text{의 배수}\}$ 에 대하여 $9 \notin A$ 이고 $12 \in A$ 를 만족하는 자연수 n 을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

▷ 정답 : 10

▷ 정답 : 11

해설

9 는 원소로 갖지 않고 12 는 원소로 가지므로
$A = \{12, 15, 18, 21, \cdots\}$ 이다.
따라서 이것을 만족하는 n 의 값은 9, 10, 11 이다.

43. 자연수로 이루어진 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ n\}$ 의 부분집합 중에서 원소 $n-1$ 과, n 을 포함하지 않은 부분집합의 개수가 64 일 때, n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

집합 A 의 원소의 개수가 n 개이므로
$2^{n-2} = 64 = 2^6$ 이다.
$\therefore\ n-2 = 6,\ n = 8$

44. 두 집합 $A = \{a,\ 5,\ a+6\}$, $B = \left\{x \middle| x\text{는 } 14\text{의 약수}\right\}$ 에서 $A \cap B = \{1,\ 7\}$ 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$1 \in A$ 이므로 $a = 1$ 또는$a + 6 = 1$ 이다.
(ⅰ) $a = 1$ 이면 $A = \{1, 5, 7\}$, $A \cap B = \{1, 7\}$ 이다.
$\therefore\ a = 1$
(ⅱ) $a + 6 = 1$ 즉, $a = -5$ 이면 $A = \{-5,\ 1,\ 5\}$, $A \cap B = \{1\}$ 이므로 조건에 맞지 않는다.
그러므로 $a = 1$ 이다.

45. 전체집합 $U = \{x \mid x\text{는 20 이하의 소수}\}$에 대하여 $A = \{2,\ 7,\ 11\}$, $B = \{3,\ 7,\ 11,\ 17\}$ 일 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $A \cap B = \{7,\ 11\}$

② $A \cap B^c = \{2\}$

③ $A^c \cap B = \{3,\ 17\}$

④ $A^c \cup B^c = \{2,\ 3,\ 9,\ 13,\ 17,\ 19\}$

⑤ $A^c \cap B^c = \{5,\ 13,\ 19\}$

해설

$U = \{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19\}$,
$A = \{2,\ 7,\ 11\}$, $B = \{3,\ 7,\ 11,\ 17\}$
② $A \cap B^c = A - B = \{2\}$
③ $A^c \cap B = B - A = \{3,\ 17\}$
④ $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c = \{2,\ 3,\ 5,\ 13,\ 17,\ 19\}$
⑤ $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = \{5,\ 13,\ 19\}$

46. 자연수 n 의 양의 배수의 집합을 A_n 이라 할 때, 다음 <보기> 에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, m, n 은 자연수)

보기

㉠ $A_5 \cap A_7 = \varnothing$

㉡ $A_4 \cup A_6 = A_4$

㉢ $m,\ n$이 서로소이면 $A_m \cap A_n = A_{mn}$

㉣ $m = kn$(k는 양의 정수) 이면 $A_m \subset A_n$

① ㉠, ㉡, ㉣　　② ㉠, ㉢　　③ ㉠, ㉢, ㉣

④ ㉡, ㉢, ㉣　　⑤ ㉢, ㉣

해설

㉠ $A_5 \cap A_7 = A_{35}$

㉡ $A_4 = \{4,\ 8,\ 12,\ 16,\ \cdots\}$

$A_6 = \{6,\ 12,\ 18,\ 24,\ \cdots\}$ 이므로

$A_4 \cup A_6 = \{4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 16,\ \cdots\} \neq A_4$

㉢ $A_m = \left\{m,\ 2m,\ \cdots,\ nm,\ (n+1)m,\ \cdots\right\}$

$A_n = \left\{n,\ 2n,\ \cdots,\ mn,\ (m+1)n,\ \cdots\right\}$

$m,\ n$이 서로소이면 $A_m \cap A_n = A_{mn}$

㉣ $A_m = A_{kn} = \{kn,\ 2kn,\ 3kn,\ \cdots\}$

$A_n = \{n,\ 2n,\ 3n,\ 4n,\ \cdots\}$이므로

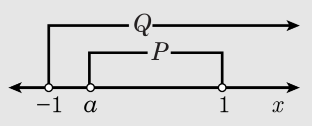
$A_m \subset A_n$

47. 실수 x에 대하여 두 조건 p : $a \le x \le 1$, q : $x \ge -1$이 있다. 명제 $p \to q$를 참이 되게 하는 상수 a 의 범위는?

① $a > 1$　② $a \le 1$　③ $-1 \le a \le 1$
④ $a \ge -1$　⑤ $a \le -1$

해설

조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.
(i) $a > 1$일 때, $P = \varnothing$ 이므로 $P \subset Q$ $\therefore$ $a > 1$
(ii) $a \le 1$ 일 때, 수직선에 나타내면



$\therefore$ $-1 \le a \le 1$
(i), (ii)에서 $a \ge -1$

48. 다음은 실수 x, y 에 대하여 「$x^2 + y^2 = 1$ 이면 $x \le 1$ 또는 $y \le 1$ 이다」가 참임을 증명한 것이다. 다음 (가), (나), (다) 에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

주어진 명제 '$x^2+y^2=1$ 이면 $x \le 1$ 또는 $y \le 1$ 이다' 의 대우인 '(가) 이면 $x^2+y^2 \ne 1$ 이다' 가 참임을 증명하면 된다. (가) 에서 $x^2+y^2 >$ (나) 이므로 $x^2+y^2 \ne 1$ 가 성립한다. 따라서 대우가 참이므로 주어진 명제도 (다) 이다.

① $x>1$ 이고 $y>1$, 1 , 참　② $x>1$ 이고 $y>1$, 2 , 참
③ $x>1$ 또는 $y>1$, 2 , 참　④ $x \ge 1$ 또는 $y \ge 1$, 1 , 거짓
⑤ $x \ge 1$ 이고 $y \ge 1$, 2 , 거짓

해설

$x \le 1$ 또는 $y \le 1$ 의 부정은 $x>1$ 이고 $y>1$ 이다.
x, y 가 모두 1 보다 크므로 x 의 제곱수와 y 의 제곱수를 더한 값은 무조건 2 보다 크게 된다.
또한, 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이 된다.

49. x, y가 실수이고 A, B, C를 집합이라 할 때 조건 p 가 조건 q이기 위한 필요충분조건은?

① $p : x + y \geq 2,\ q : x \geq 1$ 또는 $y \geq 1$

② $p : |x| + |y| = 0,\ q : 3\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 0$

③ $p : xy + 1 > x + y > 2,\ q : x > 1$ 이고 $y > 1$

④ $p : A \subset B \subset C,\ q : A \subset B$ 또는 $A \subset C$

⑤ $p : x + y$ 가 유리수이다. $q : x,\ y$ 모두 유리수이다.

해설

① $x+y \geq 2 \quad x \geq 1$ 또는 $y \geq 1$ (충분조건) (반례 : $x = 3,\ y = -3$)

② $|x| + |y| = 0 \ \Rightarrow\ {}^3\sqrt{x} + {}^3\sqrt{y} = 0$

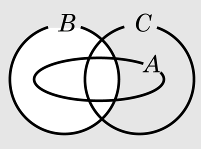
여기서 $|x| + |y| = 0$ 은 $x = 0,\ y = 0$ 과 같으므로

$x = 0,\ y = 0 \rightarrow {}^3\sqrt{x} + {}^3\sqrt{y} = 0$ (충분조건)

(반례 : $x = 8,\ y = -8$)

③ $xy + 1 > x + y > 2 \ \Leftrightarrow\ x > 1$ 이고 $y > 1$

④ $A \subset B \cup C \leftarrow A \subset B$ 또는 $A \subset C$ (충분조건)



⑤ $x + y$ 가 유리수이다. $\leftarrow x,\ y$ 모두 유리수이다.

(필요조건) (반례 : $x = 1 + \sqrt{2},\ y = 1 - \sqrt{2}$)

50. 세 조건 p, q, r 에 대하여 $\sim p \Rightarrow q$, $r \Rightarrow \sim q$ 일 때, 조건 p 가 r 이기 위한 필요충분조건이려면 다음 중 어떤 조건이 더 필요한가?

① $p \Rightarrow q$　　② $q \Rightarrow r$　　③ $p \Rightarrow r$

④ $\sim q \Rightarrow p$　　⑤ $\sim r \Rightarrow p$

해설

$r \Rightarrow \sim q$ 이므로 $q \Rightarrow \sim r$

$\sim p \Rightarrow q$ 이고 $q \Rightarrow \sim r$ 이므로 삼단논법에 의하여 $\sim p \Rightarrow \sim r$

$\therefore\ r \Rightarrow p$

따라서, $p \Leftrightarrow r$가 되려면 $r \Rightarrow p$ 이외에 $p \Rightarrow r$ 가 더 필요하다.