1. 다음 (   )안에 알맞은 값을 차례로 나열한 것은?

> 두 직선 $2x - y + 1 = 0$, $x + 2y - 2 = 0$ 의 기울기의 곱은 (   )이고, 두 직선 $3x - y + 1 = 0$, $6x - 2y + 5 = 0$ 의 기울기의 차는 (   )이다.

① $1,\ -1$　　② $-1,\ 1$　　③ $-1,\ -1$

④ $1,\ 0$　　⑤ $-1,\ 0$

해설

(1) $2x - y + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 2x + 1$

$x + 2y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 1$

따라서, 기울기의 곱은

$2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$

(2) $3x - y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = 3x + 1$

$6x - 2y + 5 = 0 \Leftrightarrow y = 3x + \frac{5}{2}$

따라서, 기울기의 차는 $|3 - 3| = 0$

2. 두 집합 $A = \{3,\ 4\}$, $B = \{2,\ 3,\ x\}$ 에 대하여 $A \subset B$ 일 때, x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

집합 A 의 모든 원소가 집합 B 에 포함 되어야 하므로 집합 B 에 원소 4 가 있어야 한다.

3. 집합 $A = \{2, 3, 5, 7\}$ 의 부분집합 중 원소 2를 반드시 포함하고 3을 포함하지 않는 부분집합의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

집합 A 에서 원소 2를 반드시 포함하고, 3을 포함하지 않는 부분집합을 구하면 $\{2\}, \{2, 5\}, \{2, 7\}, \{2, 5, 7\}$ 이므로 4개이다.

4. 집합 A, B에 대하여 $n(A) = 10,\ n(B) = 7,\ n(A \cap B) = 3$일 때, $n(A \cup B)$를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 14

해설

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
$= 10 + 7 - 3 = 14$

5. 다음 중 $x > 7$ 의 필요조건이고, 충분조건은 되지 않는 것은?

① $x > 7$　② $x < 7$　③ $x \geq 7$　④ $x \leq 7$　⑤ $x = 7$

해설

$x > 7$ 범위를 포함하는 것을 고르면 $x \geq 7$

6. 두 점 $A(2,0)$, $B(5,3)$ 에 대하여 $\overline{AB}$ 를 $2:1$ 로 내분하는 점을 P , $2:1$ 로 외분하는 점을 Q 라고 할 때, $\overline{PQ}$ 의 길이를 구하면?

① $2\sqrt{2}$　② $\sqrt{10}$　③ 10　④ 4　⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$$P=\left(\frac{2\times5+1\times2}{3},\frac{2\times3+1\times0}{3}\right)=(4,2)$$

$$Q=\left(\frac{2\times5-1\times2}{2-1},\frac{2\times3-1\times0}{2-1}\right)=(8,6)$$

$$\therefore\ \overline{PQ}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$$

7. 두 점 $\mathrm{A}(a, 4)$, $\mathrm{B}(1, b)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점을 P, y축 위의 점을 Q라 하면, $\triangle\mathrm{OPQ}$의 무게중심은 $\mathrm{G}(-1, 1)$이다. 이때, $a-b$의 값을 구하면?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$\mathrm{P}(x, 0)$, $\mathrm{Q}(0, y)$라 하면,

$\dfrac{0+x+0}{3} = -1$, $\dfrac{0+0+y}{3} = 1$에서

$x = -3$, $y = 3$

$\therefore \mathrm{P}(-3, 0), \mathrm{Q}(0, 3)$

$\overline{\mathrm{PA}}^2 = \overline{\mathrm{PB}}^2$에서

$(a+3)^2 + 4^2 = (1+3)^2 + b^2$

$a^2 + 6a + 9 = b^2$

$\overline{\mathrm{QA}}^2 = \overline{\mathrm{QB}}^2$에서

$a^2 + (4-3)^2 = 1^2 + (b-3)^2$

$a^2 = b^2 - 6b + 9$

두 식을 변변 빼고 정리하면 $a - b = -3$

8. 서로 수직인 두 직선 $y = -\frac{1}{2}x + 2$ 와 $y = 2x$ 의 교점을 H 라 할 때, H 의 좌표는 ( ) 이다. 따라서, 원점에서 직선 $y = -\frac{1}{2}x + 2$ 까지의 거리는 ( ) 이다. 위의 ( ) 안에 알맞은 것을 차례대로 나열하면?

① $\left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right), \frac{2\sqrt{5}}{5}$
② $\left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right), \frac{4\sqrt{5}}{5}$
③ $\left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right), \frac{3\sqrt{5}}{5}$
④ $\left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right), \frac{4\sqrt{5}}{5}$
⑤ $(1, 2), \sqrt{5}$

해설

두 직선 $y = -\frac{1}{2}x + 2$ 와 $y = 2x$ 의 교점

H 의 좌표는 $-\frac{1}{2}x + 2 = 2x$, $-x + 4 = 4x$

이고 $x = \frac{4}{5}$, $y = \frac{8}{5}$ 이다. 즉, $H\left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$ 이므로

따라서 $\overline{OH} = \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{8}{5}\right)^2} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ 이다.

9. 두 원 $(x+1)^2+y^2=1$, $x^2+y^2-6x-6y+2=0$ 의 공통접선의 개수는?

① 0 개 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

$(x+1)^2+y^2=1$ 에서 이 원의 중심을 C_1 이라
하면 점 C_1 의 좌표는 $(-1,\ 0)$ 이고
반지름의 길이는 1 이다.
$x^2+y^2-6x-6y+2=0$ 에서
$(x-3)^2+(y-3)^2=16$ 이므로
이 원의 중심을 C_2 이라 하면
점 C_2 의 좌표는 $(3,\ 3)$ 이고
반지름의 길이는 4 이다.
$\overline{C_1C_2}=5$ 이고
두 원의 반지름의 길이는 1, 4 이므로
두 원은 서로 외접하게 된다.
따라서 공통접선은 3 개이다.

10. 직선 $3x + y - 5 = 0$을 x축 방향으로 1만큼, y축 방향으로 n만큼 평행이동하면 직선 $3x+y-1=0$이 된다. 이 때, n의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -7

해설

x축 방향으로 1, y축 방향으로 n만큼 평행이동하므로
직선 $3x + y - 5 = 0$에 x 대신 $x - 1$, y 대신 $y - n$을 대입하면
$3(x-1) + (y-n) - 5 = 0$
$3x + y - n - 8 = 0 \quad \cdots\cdots$ ㉠
㉠이 $3x + y - 1 = 0$과 일치하므로 $-n - 8 = -1 \therefore\ n = -7$

11. 원 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 원의 중심이 $(-1, -3)$ 이고 반지름의 길이가 2 일 때, 상수 a, b, c 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

원 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
$x^2 + y^2 + ax - by + c = 0$
이 때, 이 원의 중심이 $(-1, -3)$ 이고 반지름의 길이가 2 이므로
$x^2 + y^2 + ax - by + c = 0$
$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+3)^2 = 4$
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x + 6y + 6 = 0$
$\therefore a = 2,\ b = -6,\ c = 6$
따라서, 구하는 $a,\ b,\ c$ 의 값의 합은
$2 + (-6) + 6 = 2$

12. x가 양의 실수 일 때, $x^2+1+\frac{1}{x^2}$ 의 최솟값과 그 때의 x값을 차례대로 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : 1

해설

$x^2 > 0$, $\frac{1}{x^2} > 0$이므로

산술평균과 기하평균에 의하여

$x^2 + 1 + \frac{1}{x^2} \geq 2\sqrt{x^2 \times \frac{1}{x^2}} + 1 \geq 2 + 1 = 3$

등호는 $x^2 = \frac{1}{x^2}$ 일 때 성립하므로 $x^4 = 1$

따라서 양의 실수 x는 1이다.

최솟값은 3이고, x값은 1이다.

13. 두 함수 f, g 가 $f(2)=3$, $g^{-1}(1)=4$ 일 때, $f^{-1}(3)+g(4)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$f(2)=3$ 에서 $f^{-1}(3)=2$ 이고
$g^{-1}(1)=4$ 에서 $g(4)=1$ 이므로
$f^{-1}(3)+g(4)=2+1=3$

14. 함수 $f(x) = ax + b$ 에 대하여 $f^{-1}(1) = 2$, $f(1) = 2$ 일 때, $f(3)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

$f(2) = 2a + b = 1,\ \ f(1) = a + b = 2$
연립하면 $a = -1,\ b = 3$
$\therefore\ f(3) = 3a + b = 0$

15. 세 점 $\mathrm{A}(4,\ 6)$, $\mathrm{B}(2,\ 0)$, $\mathrm{C}(6,\ -2)$에 대하여 사각형 ABCD가 평행사변형이 되게 하는 점 D의 좌표가 $(a,\ b)$일 때, $a+b$의 값은?

① 8　　② 9　　③ 10　　④ 11　　⑤ 12

해설

$\overline{\mathrm{AC}}$의 중점의 좌표는 $(5,\ 2)$

$\overline{\mathrm{BD}}$의 중점의 좌표는 $\left(\frac{2+a}{2},\ \frac{b}{2}\right)$이다.

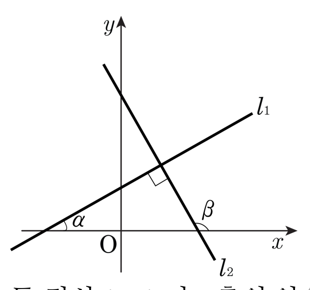
평행사변형의 성질에 의하여 $\overline{\mathrm{AC}}$와 $\overline{\mathrm{BD}}$의 중점은 일치해야 하므로

$\frac{2+a}{2}=5,\ \frac{b}{2}=2$

$\therefore\ a=8,\ b=4$

$\therefore\ a+b=12$

16. 다음은 두 직선 l_1 : $y = m_1x + n_1$, l_2 : $y = m_2x + n_2$가 서로 수직일 조건을 구하는 과정이다.



두 직선 l_1, l_2가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\tan\alpha =$ (가), $\tan\beta =$ (나)

이때, $\beta = \alpha +$ (다)이므로, $\tan\beta = \dfrac{1}{\text{(라)}}$

$\therefore\ m_1m_2 =$ (마)

위의 (가), (나), (다), (라), (마)에 알맞은 것이 잘못 짝지워진 것은?

① (가) m_1　　② (나) m_2　　③ (다) $90°$

④ (라) $\tan\alpha$　　⑤ (마) -1

해설

$\tan\alpha$=(l_1 의 기울기)$= m_1$

$\tan\beta$=(l_2 의 기울기)$= m_2$

$\beta = \alpha + 90°$이므로

$\tan\beta = (90° + \alpha) = -cot\alpha = \dfrac{1}{-\tan\ \alpha}$

따라서 $m_2 = -\dfrac{1}{m_1}$

즉, $m_1m_2 = -1$이다.

17. 점 $(2,\ -3)$을 지나고, 직선 $2x-4y-1=0$에 수직인 직선의 방정식을 구하였더니 $ax+by+c=0$가 되었다. 이를 만족하는 상수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $a+b+c$의 값은?

① 3 ② 2 ③ 1 ④ 0 ⑤ -1

해설

직선 $2x-4y-1=0$에 수직이므로
기울기는 -2이다.
점 $(2,\ -3)$을 지나므로 직선의 방정식은
$y+3=-2(x-2)$
즉, $2x+y-1=0$이다.
$a=2,\ b=1,\ c=-1$
$\therefore\ a+b+c=2$

18. 서로 다른 두 양수 a, b 에 대하여 다음 중 <u>옳은</u> 것은? (단, $a \neq b$)

① $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$ ② $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$
③ $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{2ab}{a+b}$ ④ $\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab} \leq \frac{2ab}{a+b}$
⑤ $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$

해설

$a > 0$, $b > 0$ 일 때, 산술· 기하· 조화· 평균의 관계에서

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$ (등호는 $a = b$ 일 때 성립)

그런데 문제의 조건에서 $a \neq b$ 이므로

$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$

19. 세 변의 길이가 6, 8, 10인 삼각형의 내부의 한 점 P에서 각 변에 이르는 거리를 각각 x_1, x_2, x_3라 할 때, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$의 최솟값은?

① $-\frac{288}{25}$ ② $\frac{144}{15}$ ③ $\frac{144}{25}$ ④ $\frac{288}{25}$ ⑤ $\frac{576}{25}$

해설

주어진 삼각형의 세 변을
$\overline{AB} = 10$, $\overline{BC} = 6$, $\overline{CA} = 8$이라 하면
$\angle C$가 직각인 직각삼각형이므로
$\triangle ABC = \triangle PAB + \triangle PBC + \triangle PAC$
$\therefore 24 = \frac{1}{2} \times x_1 \times 6 + \frac{1}{2} \times x_2 \times 8 + \frac{1}{2} \times x_3 \times 10$이므로
$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 24$
코시-슈바르츠 부등식에서
$(3^2 + 4^2 + 5^2)({x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2) \geq (3x_1 + 4x_2 + 5x_3)^2$
$\therefore 50 \cdot ({x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2) \geq 576$
$\therefore {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 \geq \frac{576}{50} = \frac{288}{25}$
따라서 최솟값은 $\frac{288}{25}$

20. 다음 함수의 역함수를 구하면?

$$y = x^2 - 3(\text{단, } x \geq 0)$$

① $y = \sqrt{x+1}$(단, $x \geq -1$)　② $y = \sqrt{x+2}$(단, $x \geq -2$)
③ $y = \sqrt{x+3}$(단, $x \geq -3$)　④ $y = \sqrt{x+4}$(단, $x \geq -4$)
⑤ $y = \sqrt{x+5}$(단, $x \geq -5$)

해설

$x \geq 0$이면 $y = x^2 - 3 \geq -3$이므로 주어진 함수의 치역은 $\{y \mid y \geq -3\}$
한편, $y = x^2 - 3$을 x에 대하여 풀면
$x^2 = y + 3$에서 $x = \pm\sqrt{y+3}$
이 때, $x \geq 0$이어야 하므로
$x = \sqrt{y+3}$(단, $y \geq -3$)
여기서, x, y를 서로 바꾸면
구하는 역함수는 $y = \sqrt{x+3}$(단, $x \geq -3$)

21. 점 $(1,\ -1)$ 에서 직선 $ax+by=0(a\neq 0,\ b\neq 0)$ 까지의 거리가 $\sqrt{2}$ 일 때, 상수 $a,\ b$ 의 관계를 바르게 설명한 것은?

① $a-b=0$　　② $a-b=\sqrt{2}$　　③ $a+b=0$

④ $ab=0$　　⑤ $ab=\sqrt{2}$

해설

$\dfrac{|a\times 1+b\times(-1)|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{|a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{2}$

$|a-b|=\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}$

양변을 제곱하면 $a^2-2ab+b^2=2a^2+2b^2$

$a^2+2ab+b^2=0,\ (a+b)^2=0$

따라서 $a+b=0$

22. 두 정점 $\mathrm{A}(-\sqrt{2},\ 0)$, $\mathrm{B}(\sqrt{2},\ 0)$ 가 있다. 조건 $2\overline{\mathrm{PA}}^2 - \overline{\mathrm{PB}}^2 = 9$ 를 만족시키는 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$ 의 자취는 원이다. 이 원의 반지름은?

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

해설

$2\overline{\mathrm{PA}}^2 - \overline{\mathrm{PB}}^2 = 9$

$2\left\{(x+\sqrt{2})^2+y^2\right\} - \left\{(x-\sqrt{2})^2+y^2\right\} = 9$

이것을 정리하면, $(x+3\sqrt{2})^2+y^2=25$

점 P 의 자취는 점 $(-3\sqrt{2},\ 0)$ 을 중심으로 하고,
반지름이 5 인 원이다.

23. 두 원 $(x-a)^2+(y-1)^2=1$, $(x-2)^2+(y-a)^2=4$이 직교할 때 a의 값의 합은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

두 원의 중심이 각각 $(a,\ 1)$, $(2,\ a)$이므로
두 원의 중심 사이의 거리는 $\sqrt{(a-2)^2+(1-a)^2}$이다.
두 원의 반지름은 각각 1, 2이므로
직교하기 위한 조건은
$(a-2)^2+(1-a)^2=1^2+2^2$
$\therefore\ a^2-3a=0$
근과 계수와의 관계로부터 두 근의 합은 3

24. 두 점 A$(-3,\ 0)$, B$(1,\ 0)$으로 부터의 거리의 비가 $3\ :\ 1$인 점 P에 대하여 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은?

① 2　② $\frac{5}{2}$　③ 3　④ $\frac{7}{2}$　⑤ 4

해설

주어진 조건에서 $\overline{AP}\ :\ \overline{BP}=3\ :\ 1$이므로

$\overline{AP}=3\overline{BP}$

$\therefore \overline{AP}^2=9\overline{BP}^2$

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 놓으면

$(x+3)^2+y^2=9\left(x-1)^2+y^2\right\}$

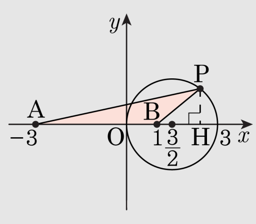
$x^2+y^2-3x=0 \therefore \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{9}{4}$

따라서 점 P는 중심이 좌표가 $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$이고

반지름의 길이가 $\frac{3}{2}$인 원 위를 움직인다.

그림과 같이 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을

H라 하면



$\triangle PAB=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{PH}$

이 때, $\overline{AB}=4$이고 $\overline{PH}$

의 길이의 최댓값은 반지름의 길이

$\frac{3}{2}$이므로 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\frac{3}{2}=3$

25. 임의의 집합 X에 대하여 집합 $A,\ B$가 $A \cap (B \cup X) = A \cup (B \cap X)$를 만족할 때, 다음 중 집합 $A,\ B$의 관계로 옳은 것은?

① $A = B$　　② $A \subset B^c$　　③ $A \cup B = U$

④ $A = \varnothing$　　⑤ $A \cap B = \varnothing$

해설

집합 X가 임의의 집합이므로 $X = \varnothing$일 때와 $X = U$(U는 전체 집합) 일 때를 생각해 본다.

ⅰ) $X = \varnothing$일 때, $A \cap (B \cup \varnothing) = A \cap B$,
$A \cup (B \cap \varnothing) = A \cup \varnothing = A$이므로 $A \cap B = A$
$\therefore\ A \subset B$

ⅱ) $X = U$일 때, $A \cap (B \cup U) = A \cap U = A$,
$A \cup (B \cap U) = A \cup B$이므로 $A = A \cup B$
$\therefore\ B \subset A$

ⅰ), ⅱ)에서 $A = B$

또, 역으로 $A = B$이면 주어진 식을 만족한다.