1. 전체집합 U 에서 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 할 때, 다음 중 '$\sim p$ 이면 $\sim q$ 이다.'가 거짓임을 보이는 원소가 속하는 집합은?

① $P \cap Q^c$ ② $P \cup Q^c$ ③ $P \cap Q$
④ $P^c \cap Q$ ⑤ $P^c \cap Q^c$

해설

'$\sim p$ 이면 $\sim q$ 이다.'가 거짓이므로 대우명제 'q 이면 p 이다.'도 거짓이다. 즉 $Q \subset P$ 가 거짓이므로 $Q - P \neq \varnothing$ 임을 보이면 된다. 따라서 $Q \cap P^c$ 에 속하는 원소이다.

2. 전체집합 $U = \{x \mid x\text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$ 에서 두 조건 p, q 를 만족하는 두 집합을 각각 P, Q라 하자. $P = \{x \mid x\text{는 } 2\text{의 배수}\}$, $Q = \{x \mid x\text{는 } 3\text{의 배수}\}$ 일 때, $p \rightarrow \sim q$ 가 거짓임을 보이는 원소는?

① 1　② 2　③ 3　④ 6　⑤ 7

해설

$p \rightarrow \sim q$ 의 반례는$P \not\subset Q^c$ 을 만족하는 원소이다.
즉, P 의 원소이면서 Q^c 의 원소가 아닌 것이므로 $P \cap (Q^c)^c = P \cap Q$
$\therefore P \cap Q = \{6\}$

3. 다음 중 명제 '$ab = |ab|$ 이면 $a \geq 0$ 이고 $b \geq 0$ 이다.' 가 거짓임을 보여주는 반례로 알맞은 것은?

① $a = 2, b = 2$
② $a = -3, b = -1$
③ $a = \frac{1}{2}, b = 1$
④ $a = -1, b = 1$
⑤ $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{3}$

해설

$a = -3,\ b = -1$ 이면 $ab = |ab|$ 이지만 $a \geq 0,\ b \geq 0$ 은 아니다.

4. 실수 x 에 대하여 명제 '$ax^2 + a^2x - 6 \neq 0$ 이면 $x \neq 2$ 이다.' 가 참이기 위한 모든 실수 a 의 값의 합을 구하여라. (단, $a \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

주어진 명제가 참이므로 대우도 참이다.
즉, '$x = 2$ 이면 $ax^2 + a^2x - 6 = 0$ 이다.' 가 참이므로
$4a + 2a^2 - 6 = 0$, $2a^2 + 4a - 6 = 0$,
$a^2 + 2a - 3 = 0$, $(a + 3)(a - 1) = 0$
$\therefore$ $a = -3$ 또는 $a = 1$
따라서 a 의 값의 합은 $-3 + 1 = -2$

5. 두 조건 $p : x^2 - ax - 6 > 0$, $q : x^2 + 2x - 3 \neq 0$에 대하여 $p \to q$가 참일 때 a의 최댓값, 최솟값의 합은?

① -7　② -6　③ -5　④ -4　⑤ -3

해설

$p \to q$는 $\sim q \to \sim p$와 동치임을 이용
$\therefore x^2 + 2x - 3 = 0$이면 $x^2 - ax - 6 \leq 0$이다.
$x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1) = 0$,
$x = -3,\ 1$이면 $x^2 - ax - 6 \leq 0$이다.
1) $x = -3\ : 9 + 3a - 6 \leq 0 \ \to\ a \leq -1$
2) $x = 1\ : 1 - a - 6 \leq 0 \ \to\ a \geq -5$
$\therefore\ -5 \leq a \leq -1$
따라서, $-5 + (-1) = -6$

6. 명제 '$2x^2+ax-9 \neq 0$ 이면 $x-3 \neq 0$ 이다' 가 참이 되도록 하는 상수 a 의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

대우인 '$x-3=0$이면 $2x^2+ax-9=0$ 이다.'가 참이 되어야 한다.

$2 \cdot 3^2 + 3a - 9 = 0,\ 3a + 9 = 0$

$\therefore\ a = -3$

7. $x \le -1$은 $x \le a$이기 위한 필요조건이고, $x \ge b$는 $x \ge 3$이기 위한 충분조건일 때, a의 최댓값과 b의 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x \le -1$은 $x \le a$이기 위한 필요조건이므로
「$x \le a$ 이면 $x \le -1$ 이다.」가 참이어야 한다.
$\therefore\ a \le -1$
또, $x \ge b$는 $x \ge 3$이기 위한 충분조건이므로
「$x \ge b$ 이면 $x \ge 3$ 이다.」가 참이어야 한다.
$\therefore\ b \ge 3$
따라서, a의 최댓값은 -1, b의 최솟값은 3이므로
구하는 값은 $-1 + 3 = 2$이다.

8. 세 조건 $p : 4 \le x \le 5$, $q : x \le a$, $r : x \ge b$ 에 대하여 p 가 q 이기 위한 충분조건이 되도록 하는 a 의 최솟값을 m 이라 하고, r 이 p 이기 위한 필요조건이 되도록 하는 b 의 최댓값을 n 이라 할 때, $m+n$ 의 값은?

① -1　② 1　③ 8　④ 9　⑤ 10

해설

$p \Rightarrow q$ 이면 $P \subset Q$ 이므로 $a \ge 5$

$\therefore m = 5$

$p \Rightarrow r$ 이면 $P \subset R$ 이므로 $b \le 4$

$\therefore\ n = 4$

$\therefore\ m + n = 9$

9. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 할 때, $P = \left\{a^2, 1\right\}$, $Q = \{a, 1\}$ 이다. p 가 q 이기 위한 필요충분조건일 때, 상수 a 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1

④ -1 또는 0 ⑤ 0 또는 1

해설

p 는 q 이기 위한 필요충분조건이므로

$P = Q$

$\left\{a^2, 1\right\} = \{a, 1\}$

$a^2 = a$ 또는 $a^2 = 1$

$a = 0,\ 1$ 또는 $a = -1,\ 1$

이 때, $a = -1$ 이면 $\{1, 1\} = \{-1, 1\}$ 이 되어 모순이므로 a 는 0 또는 1 이다.

10. 다음 두 조건 $p : |x-2| \le h,\ q : |x+2| \le 12$ 에 대하여 p 가 q 이기 위한 충분조건이 되도록 하는 h 의 최댓값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

$p : 2-h \le x \le 2+h,\ \ q : -14 \le x \le 10$

$-14 \le 2-h \quad \rightarrow \quad h \le 16$

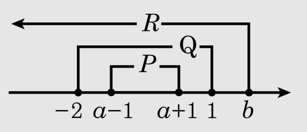
$2+h \le 10 \quad \rightarrow \quad h \le 8$

11. $p : |x-a| \le 1$, $q : -2 < x \le 1$,
$r : x \le b$ 에 대해 p 는 q 이기 위한 충분조건, r 은 q 이기 위한 필요조건일 때 a 의 최댓값, b 의 최솟값을 구하면?

① $-1,\ 1$　② $-1,\ -1$　③ $0,\ 1$
④ $1,\ 1$　⑤ $1,\ -1$

해설

$p : |x-a| \le 1 = a-1 \le x \le a+1$
p, q, r 의 진리집합을 각각 P, Q, R 이라 할 때
p 는 q 이기 위한 충분조건, r 은 q 이기 위한 필요조건이므로
수직선에 나타내면



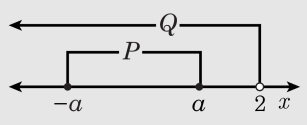
$a-1 > -2,\ a+1 \le 1$ 이므로
$-1 < a \le 0$ 이고 $b \ge 1$
따라서, a 의 최댓값은 0, b 의 최솟값은 1

12. $|x| \le a$가 $2x - 5 < x - 3$이 되기 위한 충분조건이 되도록 실수 a의 범위를 정하면?

① $a < 2$ ② $a > 2$ ③ $a \le 2$ ④ $a < 1$ ⑤ $a > 4$

해설

$P = \{x| -a \le x \le a\}$, $Q = \{x|2x - 5 < x - 3\} = \{x|x < 2\}$ 에서 $P \subset Q$ 가 되도록 a 값의 범위를 결정한다. P, Q 를 문제의 조건을 만족시키도록 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.



(주의 : $a \ne 2$ $\because$ $P \subset Q$)$\therefore$ $a < 2$

13. 다음은 자연수 n 에 대하여 명제 'n^2 이 3 의 배수이면 n 도 3 의 배수이다.' 를 증명한 것이다.

> 주어진 명제의 대우를 구하면 'n 이 3 의 배수가 아니면 n^2 도 $\boxed{(가)}$' 이다. n 이 3 의 배수가 아니므로 $n = 3m \pm \boxed{(나)}$ (m 은 자연수) 에서 $n^2 = 9m^2 \pm 6m + 1 = 3\left(3m^2 \pm 2m\right) + 1$
> 따라서, $3m^2 \pm 2m$ 이 $\boxed{(다)}$ 이므로 n^2 은 $\boxed{(라)}$ 그러므로 대우가 $\boxed{(마)}$ 이므로 주어진 명제도 $\boxed{(마)}$ 이다.

위의 과정에서 빈칸에 들어갈 수나 식이 잘못 연결된 것은?

① (가) 3 의 배수가 아니다.　② (나) 1

③ (다) 자연수　④ (라) 3 의 배수이다.

⑤ (마) 참

해설

주어진 명제의 대우는 'n 이 3 의 배수가 아니면 n^2 도 $\boxed{\text{3 의 배수가 아니다}}$' 이다. n 이 3 의 배수가 아니므로 $n = 3m \pm \boxed{1}$ (m 은 자연수) 에서 $n^2 = 9m^2 \pm 6m + 1 = 3\left(3m^2 \pm 2m\right) + 1$
따라서, $3m^2 \pm 2m$ 이 $\boxed{\text{자연수}}$ 이므로 n^2 은 $\boxed{\text{3 의 배수가 아니다.}}$
그러므로 대우가 $\boxed{\text{참}}$ 이므로 주어진 명제도 $\boxed{\text{참}}$ 이다.

14. 다음은 명제 '세 자연수 a, b, c에 대하여, $a^2+b^2=c^2$이면, a, b, c 중 적어도 하나는 3의 배수이다.'의 참, 거짓을 대우를 이용하여 판별하는 과정이다.

> 주어진 명제의 대우는
> '세 자연수 a, b, c 에 대하여 a, b, c 모두 3의 배수가 아니면 $a^2+b^2 \neq c^2$'이므로
> $a^2+b^2=3m+[\ ㉠\ ]$, $c^2=3n+[\ ㉡\ ]$
> $\therefore\ a^2+b^2 \neq c^2$ (단, m, n은 음이 아닌 정수) 따라서 대우가 [㉢] 이므로 주어진 명제도 [㉢] 이다.

위의 과정에서, ㉠, ㉡, ㉢에 들어갈 알맞은 것을 순서대로 바르게 나열한 것은?

① 1, 0, 참　② 1, 2, 거짓　③ 2, 1, 참
④ 2, 0, 참　⑤ 0, 1, 참

해설

(대우 'a, b, c 모두 3의 배수가 아니라면 $a^2+b^2 \neq c^2$'
이것의 참, 거짓을 증명하는 과정이다.
$a=3p\pm1$, $b=3q\pm1$, $c=3r\pm1$ 이면 $a^2=3(3p^2\pm2p)+1, b^2=3(3q^2\pm2q)+1$ 이므로
$a^2+b^2=3m+2$ (m 은 음이 아닌 정수) 의 꼴이다.
$\therefore [\ ㉠\ ]=2$
그리고 $c^2=3(3r^2\pm2r)+1$ 이므로
$c^2=3n+1$ (n은 음이 아닌 정수) 의 꼴이다.
$\therefore [\ ㉡\ ]=1$
$\therefore a^2+b^2 \neq c^2$
따라서, 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.
$\therefore [\ ㉢\ ]=$ 참

15. 다음은 정수 a, b 에 대하여 명제 'ab 가 짝수이면 a 또는 b 가 짝수이다.' 를 증명한 것이다.

> a, b 를 모두 홀수라 하면 $a = 2m-1, b = 2n-1$ (m, n 은 정수)로 나타낼 수 있으므로
> $ab = (2m-1)(2n-1) = 4mn-2m-2n+1$
> $= 2(2mn-m-n)+1$
> 이때, $2mn-m-n$이 $\boxed{}$' 이므로, ab 는 $\boxed{}$이다.
> 따라서, 'a, b 가 홀수이면 ab 는 홀수이다.' 는 참이고 이것은 주어진 명제의 $\boxed{}$이므로 주어진 명제도 참이다.

위의 과정에서 빈칸에 알맞은 것을 순서대로 나열한 것은?

① 자연수, 홀수, 역　　② 정수, 짝수, 대우
③ 정수, 홀수, 대우　　④ 유리수, 짝수, 이
⑤ 유리수, 홀수, 이

해설

a, b 를 모두 홀수라 하면
$a = 2m-1, b = 2n-1$ (m, n 은 정수)로 나타낼 수 있으므로

$$\begin{aligned} ab = (2m-1)(2n-1) &= 4mn-2m-2n+1 \\ &= 2(2mn-m-n)+1 \end{aligned}$$

이때, $2mn-m-n$ 이 $\boxed{\text{정수}}$이므로 ab 는 $\boxed{\text{홀수}}$이다. 이것은 주어진 명제의 $\boxed{\text{대우}}$가 참임을 증명하여 주어진 명제가 참임을 증명한 것이다.