

1. 전체집합 U 에서 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 할 때, 다음 중 ' $\sim p$ 이면 $\sim q$ 이다.'가 거짓임을 보이는 원소가 속하는 집합은?

① $P \cap Q^c$

② $P \cup Q^c$

③ $P \cap Q$

④ $P^c \cap Q$

⑤ $P^c \cap Q^c$

해설

' $\sim p$ 이면 $\sim q$ 이다.'가 거짓이므로 대우명제 ' q 이면 p 이다.'도 거짓이다. 즉 $Q \not\subset P$ 가 거짓이므로 $Q - P \neq \emptyset$ 임을 보이면 된다. 따라서 $Q \cap P^c$ 에 속하는 원소이다.

2. 전체집합 $U = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$ 에서 두 조건 p, q 를 만족하는 두 집합을 각각 P, Q 라 하자. $P = \{x \mid x \text{는 } 2 \text{의 배수}\}$, $Q = \{x \mid x \text{는 } 3 \text{의 배수}\}$ 일 때, $p \rightarrow \sim q$ 가 거짓임을 보이는 원소는?

① 1

② 2

③ 3

④ 6

⑤ 7

해설

$p \rightarrow \sim q$ 의 반례는 $P \not\subset Q^c$ 을 만족하는 원소이다.

즉, P 의 원소이면서 Q^c 의 원소가 아닌 것이므로 $P \cap (Q^c)^c = P \cap Q$

$\therefore P \cap Q = \{6\}$

3. 다음 중 명제 ' $ab = |ab|$ 이면 $a \geq 0$ 이고 $b \geq 0$ 이다.' 가 거짓임을 보여주는 반례로 알맞은 것은?

① $a = 2, b = 2$

② $a = -3, b = -1$

③ $a = \frac{1}{2}, b = 1$

④ $a = -1, b = 1$

⑤ $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{3}$

해설

$a = -3, b = -1$ 이면 $ab = |ab|$ 이지만 $a \geq 0, b \geq 0$ 은 아니다.

4. 실수 x 에 대하여 명제 ' $ax^2 + a^2x - 6 \neq 0$ 이면 $x \neq 2$ 이다.' 가 참이기 위한 모든 실수 a 의 값의 합을 구하여라. (단, $a \neq 0$)

▶ 답:

▷ 정답: -2

해설

주어진 명제가 참이므로 대우도 참이다.

즉, ' $x = 2$ 이면 $ax^2 + a^2x - 6 = 0$ 이다.' 가 참이므로

$$4a + 2a^2 - 6 = 0, \quad 2a^2 + 4a - 6 = 0,$$

$$a^2 + 2a - 3 = 0, \quad (a + 3)(a - 1) = 0$$

$$\therefore a = -3 \text{ 또는 } a = 1$$

따라서 a 의 값의 합은 $-3 + 1 = -2$

5. 두 조건 $p : x^2 - ax - 6 > 0$, $q : x^2 + 2x - 3 \neq 0$ 에 대하여 $p \rightarrow q$ 가 참일 때 a 의 최댓값, 최솟값의 합은?

① -7

② -6

③ -5

④ -4

⑤ -3

해설

$p \rightarrow q$ 는 $\sim q \rightarrow \sim p$ 와 동치임을 이용

$\therefore x^2 + 2x - 3 = 0$ 이면 $x^2 - ax - 6 \leq 0$ 이다.

$$x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1) = 0,$$

$x = -3, 1$ 이면 $x^2 - ax - 6 \leq 0$ 이다.

1) $x = -3 : 9 + 3a - 6 \leq 0 \rightarrow a \leq -1$

2) $x = 1 : 1 - a - 6 \leq 0 \rightarrow a \geq -5$

$$\therefore -5 \leq a \leq -1$$

따라서, $-5 + (-1) = -6$

6. 명제 ' $2x^2 + ax - 9 \neq 0$ 이면 $x - 3 \neq 0$ 이다' 가 참이 되도록 하는 상수 a 의 값은?

- ① -3 ② -2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

대우인 ' $x - 3 = 0$ 이면 $2x^2 + ax - 9 = 0$ 이다.'가 참이 되어야 한다.

$$2 \cdot 3^2 + 3a - 9 = 0, \quad 3a + 9 = 0$$

$$\therefore a = -3$$

7. $x \leq -1$ 은 $x \leq a$ 이기 위한 필요조건이고, $x \geq b$ 는 $x \geq 3$ 이기 위한 충분조건일 때, a 의 최댓값과 b 의 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x \leq -1$ 은 $x \leq a$ 이기 위한 필요조건이므로
「 $x \leq a$ 이면 $x \leq -1$ 이다.」가 참이어야 한다.

$$\therefore a \leq -1$$

또, $x \geq b$ 는 $x \geq 3$ 이기 위한 충분조건이므로
「 $x \geq b$ 이면 $x \geq 3$ 이다.」가 참이어야 한다.

$$\therefore b \geq 3$$

따라서, a 의 최댓값은 -1 , b 의 최솟값은 3 이므로
구하는 값은 $-1 + 3 = 2$ 이다.

8. 세 조건 $p: 4 \leq x \leq 5$, $q: x \leq a$, $r: x \geq b$ 에 대하여 p 가 q 이기 위한 충분조건이 되도록 하는 a 의 최솟값을 m 이라 하고, r 이 p 이기 위한 필요조건이 되도록 하는 b 의 최댓값을 n 이라 할 때, $m+n$ 의 값은?

① -1

② 1

③ 8

④ 9

⑤ 10

해설

$p \Rightarrow q$ 이면 $P \subset Q$ 이므로 $a \geq 5$

$\therefore m = 5$

$p \Rightarrow r$ 이면 $P \subset R$ 이므로 $b \leq 4$

$\therefore n = 4$

$\therefore m + n = 9$

9. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 할 때, $P = \{a^2, 1\}$, $Q = \{a, 1\}$ 이다. p 가 q 이기 위한 필요충분조건일 때, 상수 a 의 값은?

① -1

② 0

③ 1

④ -1 또는 0

⑤ 0 또는 1

해설

p 는 q 이기 위한 필요충분조건이므로

$$P = Q$$

$$\{a^2, 1\} = \{a, 1\}$$

$$a^2 = a \text{ 또는 } a^2 = 1$$

$$a = 0, 1 \text{ 또는 } a = -1, 1$$

이 때, $a = -1$ 이면 $\{1, 1\} = \{-1, 1\}$ 이 되어 모순이므로 a 는 0 또는 1이다.

10. 다음 두 조건 $p : |x - 2| \leq h$, $q : |x + 2| \leq 12$ 에 대하여 p 가 q 이기 위한 충분조건이 되도록 하는 h 의 최댓값은?

① 8

② 9

③ 10

④ 11

⑤ 12

해설

$$p : 2 - h \leq x \leq 2 + h, \quad q : -14 \leq x \leq 10$$

$$-14 \leq 2 - h \rightarrow h \leq 16$$

$$2 + h \leq 10 \rightarrow h \leq 8$$

11. $p: |x-a| \leq 1, q: -2 < x \leq 1,$
 $r: x \leq b$ 에 대해 p 는 q 이기 위한 충분조건, r 은 q 이기 위한 필요조건일 때 a 의 최댓값, b 의 최솟값을 구하면?

① -1, 1

② -1, -1

③ 0, 1

④ 1, 1

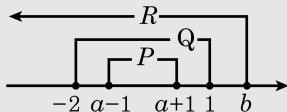
⑤ 1, -1

해설

$$p: |x-a| \leq 1 = a-1 \leq x \leq a+1$$

p, q, r 의 진리집합을 각각 P, Q, R 이라 할 때

p 는 q 이기 위한 충분조건, r 은 q 이기 위한 필요조건이므로
수직선에 나타내면



$$a-1 > -2, a+1 \leq 1 \text{ 이므로}$$

$$-1 < a \leq 0 \text{ 이고 } b \geq 1$$

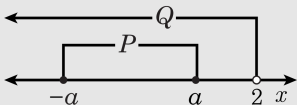
따라서, a 의 최댓값은 0, b 의 최솟값은 1

12. $|x| \leq a$ 가 $2x - 5 < x - 3$ 이 되기 위한 충분조건이 되도록 실수 a 의 범위를 정하면?

- ① $a < 2$ ② $a > 2$ ③ $a \leq 2$ ④ $a < 1$ ⑤ $a > 4$

해설

$P = \{x | -a \leq x \leq a\}$, $Q = \{x | 2x - 5 < x - 3\} = \{x | x < 2\}$
 에서 $P \subset Q$ 가 되도록 a 값의 범위를 결정한다. P, Q 를 문제의 조건을 만족시키도록 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.



(주의 : $a \neq 2 \because P \subset Q$) $\therefore a < 2$

13. 다음은 자연수 n 에 대하여 명제 ‘ n^2 이 3의 배수이면 n 도 3의 배수이다.’를 증명한 것이다.

주어진 명제의 대우를 구하면 ‘ n 이 3의 배수가 아니면 n^2 도 (가)’이다. n 이 3의 배수가 아니므로 $n = 3m \pm$ (나) (m 은 자연수)에서 $n^2 = 9m^2 \pm 6m + 1 = 3(3m^2 \pm 2m) + 1$ 따라서, $3m^2 \pm 2m$ 이 (다)이므로 n^2 은 (라) 그러므로 대우가 (마)이므로 주어진 명제도 (마)이다.

위

의 과정에서 빈칸에 들어갈 수나 식이 잘못 연결된 것은?

- ① (가) 3의 배수가 아니다. ② (나) 1
 ③ (다) 자연수 ④ (라) 3의 배수이다.
 ⑤ (마) 참

해설

주어진 명제의 대우는 ‘ n 이 3의 배수가 아니면 n^2 도 3의 배수가 아니다’이다. n 이 3의 배수가 아니므로 $n = 3m \pm$ 1 (m 은 자연수)에서 $n^2 = 9m^2 \pm 6m + 1 = 3(3m^2 \pm 2m) + 1$ 따라서, $3m^2 \pm 2m$ 이 자연수이므로 n^2 은 3의 배수가 아니다. 그러므로 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

14. 다음은 명제 ‘세 자연수 a, b, c 에 대하여, $a^2 + b^2 = c^2$ 이면, a, b, c 중 적어도 하나는 3의 배수이다.’의 참, 거짓을 대우를 이용하여 판별하는 과정이다.

주어진 명제의 대우는

‘세 자연수 a, b, c 에 대하여 a, b, c 모두 3의 배수가 아니면 $a^2 + b^2 \neq c^2$ ’이므로

$$a^2 + b^2 = 3m + [\text{㉠}], c^2 = 3n + [\text{㉡}]$$

$\therefore a^2 + b^2 \neq c^2$ (단, m, n 은 음이 아닌 정수) 따라서 대우가 [㉢] 이므로 주어진 명제도 [㉢] 이다.

위의 과정에서, ㉠, ㉡, ㉢에 들어갈 알맞은 것을 순서대로 바르게 나열한 것은?

① 1, 0, 참

② 1, 2, 거짓

③ 2, 1, 참

④ 2, 0, 참

⑤ 0, 1, 참

해설

(대우 ‘ a, b, c 모두 3의 배수가 아니라면 $a^2 + b^2 \neq c^2$ ’

이것의 참, 거짓을 증명하는 과정이다.

$a = 3p \pm 1, b = 3q \pm 1, c = 3r \pm 1$ 이면 $a^2 = 3(3p^2 \pm 2p) + 1, b^2 = 3(3q^2 \pm 2q) + 1$ 이므로

$a^2 + b^2 = 3m + 2$ (m 은 음이 아닌 정수)의 꼴이다.

$$\therefore [\text{㉠}] = 2$$

그리고 $c^2 = 3(3r^2 \pm 2r) + 1$ 이므로

$c^2 = 3n + 1$ (n 은 음이 아닌 정수)의 꼴이다.

$$\therefore [\text{㉡}] = 1$$

$$\therefore a^2 + b^2 \neq c^2$$

따라서, 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

$$\therefore [\text{㉢}] = \text{참}$$

15. 다음은 정수 a, b 에 대하여 명제 ‘ ab 가 짝수이면 a 또는 b 가 짝수이다.’ 를 증명한 것이다.

a, b 를 모두 홀수라 하면 $a = 2m - 1, b = 2n - 1$ (m, n 은 정수)로 나타낼 수 있으므로

$$ab = (2m - 1)(2n - 1) = 4mn - 2m - 2n + 1$$

$$= 2(2mn - m - n) + 1$$

이때, $2mn - m - n$ 이 이므로, ab 는 이다.

따라서, ‘ a, b 가 홀수이면 ab 는 홀수이다.’ 는 참이고 이것은 주어진 명제의 이므로 주어진 명제도 참이다.

위의 과정에서 빈칸에 알맞은 것을 순서대로 나열한 것은?

- ① 자연수, 홀수, 역 ② 정수, 짝수, 대우
 ③ 정수, 홀수, 대우 ④ 유리수, 짝수, 이
 ⑤ 유리수, 홀수, 이

해설

a, b 를 모두 홀수라 하면

$a = 2m - 1, b = 2n - 1$ (m, n 은 정수)로 나타낼 수 있으므로

$$\begin{aligned} ab &= (2m - 1)(2n - 1) = 4mn - 2m - 2n + 1 \\ &= 2(2mn - m - n) + 1 \end{aligned}$$

이때, $2mn - m - n$ 이 정수 이므로 ab 는 홀수 이다. 이것은 주어진 명제의 대우 가 참임을 증명하여 주어진 명제가 참임을 증명한 것이다.