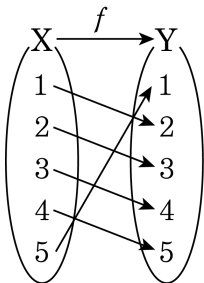


1. 다음 그림과 같이 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 이고, 함수 $f : X \rightarrow X$ 에 대하여 $(f \circ f)(a) = 3$ 이 되는 a 의 값은?



① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$f(f(a)) = 3 \text{ 이므로 } f(a) = 2$$

$$\therefore a = 1$$

2. 0이 아닌 실수에서 정의되는 두 함수 $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$, $g(x) = 1 - x$ 에 대하여 $h(x) = f(g(x))$ 라고 할 때 $h(x) = \frac{99}{100}$ 를 만족시키는 실수 x 의 값은?

- ① -99 ② -98 ③ -97 ④ -96 ⑤ -95

해설

$$h(x) = f(1 - x) = 1 - \frac{1}{1 - x}$$

$$1 - \frac{1}{1 - x} = \frac{99}{100}, 1 - x = 100, x = -99$$

3. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 $f(x) = ax + b$ 가 다음 두 조건을 만족한다고 한다.

$$(가) (f \circ f)(x) = x$$

$$(나) f(5) = 3$$

이때, $f(4)$ 의 값은 ? (단, a, b 는 상수이다.)

① -3

② -2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\begin{aligned}(f \circ f)(x) &= f(f(x)) = af(x) + b \\ &= a(ax + b) + b = a^2x + ab + b\end{aligned}$$

$$a^2x + ab + b = x \text{에서 } (a^2 - 1)x + b(a + 1) = 0$$

이 등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로

$$a^2 = 1, b(a + 1) = 0$$

(i) $a = 1$ 일 때, $b = 0$ 이므로 $f(x) = x$

이때, $f(5) = 5 \neq 3$ 이므로 부적합하다.

(ii) $a = -1$ 일 때, b 는 임의의 실수이므로

$$f(x) = -x + b$$

이때, $f(5) = -5 + b = 3$ 이므로 $b = 8$

따라서, $f(x) = -x + 8$ 이므로 $f(4) = 4$

4. 함수 $f(x) = 2x - a$ 에 대하여 $(f \circ f)(1) = -5$ 일 때, 상수 a 의 값을 구하면?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$$f(f(1)) = f(2 - a) = 2(2 - a) - a = 4 - 3a$$

$$(f \circ f)(1) = -5 \text{ 에서 } 4 - 3a = -5$$

$$\therefore a = 3$$

5. 두 함수 $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = -x + k$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 가 성립할 때, 상수 k 의 값은?

① -5

② -6

③ -7

④ -8

⑤ -9

해설

$$f \circ g = g \circ f \text{ 에서 } -2x + 2k + 3 = -2x - 3 + k$$

$$\therefore k = -6$$

6. 두 함수 $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = ax - 1$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 일 때, 상수 a 의 값은?

① $\frac{2}{3}$

② $\frac{1}{3}$

③ 1

④ $-\frac{1}{3}$

⑤ $-\frac{2}{3}$

해설

$$f \circ g = g \circ f \text{에서 } 2ax + 1 = 2ax + 3a - 1$$

$$\therefore a = \frac{2}{3}$$

7. 함수 $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 가 $(g \circ f)(x) = x^2 - x + 3$ 을 만족할 때, $g(x)$ 를 구하면?

① $g(x) = 2x^2 - 12x + 15$

② $g(x) = -2x^2 + 12x + 15$

③ $g(x) = 2x^2 - 14x + 15$

④ $g(x) = -4x^2 + 14x + 15$

⑤ $g(x) = 4x^2 - 14x + 15$

해설

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g\left(-\frac{1}{2}x + 2\right) \\ &= x^2 - x + 3\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2}x + 2 = t \text{ 라 하면 } x = -2t + 4$$

$$\therefore g(t) = (-2t + 4)^2 - (-2t + 4) + 3 = 4t^2 - 14t + 15$$

$$\therefore g(x) = 4x^2 - 14x + 15$$

8. 두 함수 $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$, $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$ 에 대하여 함수 $h(x)$ 가 $f(h(x)) = g(x)$ 를 만족시킨다. 이 때 $h(2)$ 의 값을 구하면?

① $-\frac{3}{2}$

② -2

③ $-\frac{5}{2}$

④ -3

⑤ $-\frac{7}{2}$

해설

$$f(h(x)) = \frac{h(x)-1}{h(x)+2} = \frac{x+1}{x-1} = g(x)$$

$$(x-1)\{h(x)-1\} = (x+1)\{h(x)+2\}$$

$$2h(x) = -3x - 1, h(x) = \frac{-3x-1}{2}$$

$$\therefore h(2) = -\frac{7}{2}$$

9. 두 함수 $f(x) = x + 3$, $g(x) = 2x - 1$ 이고 $(f \circ h)(x) = g(x)$ 일 때, $h(1)$ 의 값은 얼마인가?

- ① -2 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

해설

$(f \circ h)(x) = g(x)$ 에 $x = 1$ 을 대입하면 $f(h(1)) = g(1)$
한편, $g(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$ 이므로 $h(1) = k$ 라 하면
 $f(k) = 1$ 에서 $f(k) = k + 3 = 1$ 이므로 $k = -2$
 $\therefore h(1) = -2$

10. 두 함수 $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = -4x - 5$ 일 때, $(h \circ f)(x) = g(x)$ 를 만족시키는 일차함수 $h(x)$ 에 대하여 $(h \circ g)(-2)$ 의 값은 얼마인가?

① 5

② 3

③ 1

④ -3

⑤ -5

해설

$h(x) = ax + b$ 로 놓으면

$$(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(2x + 3)$$

$$= a(2x + 3) + b = 2ax + 3a + b$$

그런데, $(h \circ f)(x) = g(x)$ 이므로

$$2ax + 3a + b = -4x - 5,$$

$$2a = -4, 3a + b = -5$$

즉, $a = -2, b = 1$ 이므로 $h(x) = -2x + 1$

$$(h \circ g)(-2) = h(g(-2)) = h(3) = -5$$

해설

$(h \circ f)(x) = g(x)$ 에서

$h(f(x)) = g(x)$ 이고 $f(x) = 2x + 3$ 이므로

$$h(2x + 3) = g(x)$$

또한, $(h \circ g)(-2) = h(g(-2)) = h(3)$

$$h(3) = g(0) = -5$$

11. 함수 f 에 대하여 $f \circ f = f^2$, $f^2 \circ f = f^3$, $\dots$, $f^n \circ f = f^{n+1}$ 이라고 정의한다. $f(x) = x - 1$ 일 때, $f^{1998}(1)$ 의 값은?

① -1998

② -1997

③ 0

④ 1

⑤ 1998

해설

$$f(x) = x - 1$$

$$f^2(x) = f(f(x)) = (x - 1) - 1 = x - 2$$

$$f^3(x) = f^2(f(x)) = (x - 1) - 2 = x - 3$$

$$\vdots$$

$$f^n(x) = x - n \quad (n \text{ 은 정수})$$

$$f^{1998}(x) = x - 1998$$

$$\therefore f^{1998}(1) = -1997$$

12. 림은 $y = f(x)$ 와 $y = x$ 의 그래프이다. 이를 이용하여 $(f \circ f)(x) = d$ 를 만족시키는 x 의 값은 얼마인가?

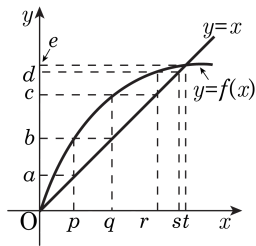
① p

② q

③ r

④ s

⑤ t



해설

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = d \dots \dots \textcircled{1}$$

그런데, 주어진 그래프에서 $f(r) = d$ 이므로

$$\textcircled{1} \text{에서 } f(x) = r$$

$$\therefore r = c \text{ 에서 } f(x) = r = c$$

$$\therefore x = q$$

13. 다음 보기의 함수 $f(x)$ 중 $(f \circ f \circ f)(x) = f(x)$ 가 성립하는 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $f(x) = x + 1$

㉡ $f(x) = -x$

㉢ $f(x) = -x + 1$

① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉠, ㉢

⑤ ㉡, ㉢

해설

$$\begin{aligned}\text{㉠. } (f \circ f \circ f)(x) &= f(f(f(x))) = f(f(x+1)) \\ &= f((x+1)+1) = f(x+2) \\ &= (x+2)+1 = x+3 \\ \therefore (f \circ f \circ f)(x) &\neq f(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{㉡. } (f \circ f \circ f)(x) &= f(f(f(x))) = f(f(-x)) \\ &= f(-(-x)) = f(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{㉢. } (f \circ f \circ f)(x) &= f(f(f(x))) = f(f(-x+1)) \\ &= f(-(-x+1)+1) = f(x)\end{aligned}$$

따라서 $(f \circ f \circ f)(x) = f(x)$ 가 성립하는 것은 ㉡, ㉢ 이다.

14. 함수 $f(x) = \frac{x}{x+1}$ 에 대하여 $f^9\left(\frac{1}{2}\right) + f^{10}\left(\frac{1}{2}\right)$ 의 값을 구하면?
(단, $f^2 = f \circ f$, $f^n = f^{n-1} \circ f$ 이다.)

① $\frac{80}{399}$

② $\frac{82}{399}$

③ $\frac{83}{399}$

④ $\frac{85}{399}$

⑤ $\frac{86}{399}$

해설

$$f^2(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1} + 1}$$

$$= \frac{x}{2x+1}$$

$$f^3(x) = f(f^2(x)) = f\left(\frac{x}{2x+1}\right) = \frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x}{2x+1} + 1}$$

$$= \frac{x}{3x+1}$$

$$f^4(x) = f(f^3(x)) = f\left(\frac{x}{3x+1}\right) = \frac{\frac{x}{3x+1}}{\frac{x}{3x+1} + 1}$$

$$= \frac{x}{4x+1}$$

이제 $f^{n-1}(x) = \frac{x}{(n-1)x+1}$ 라고 놓으면

$$f^n(x) = f(f^{n-1}(x)) = f\left(\frac{x}{(n-1)x+1}\right)$$

$$= \frac{\frac{x}{(n-1)x+1}}{\frac{x}{(n-1)x+1} + 1} = \frac{x}{(n-1)x+1+x}$$

$$= \frac{x}{nx+1}$$

$$\therefore f^9(2) + f^{10}(2) = \frac{2}{9 \cdot 2 + 1} + \frac{2}{10 \cdot 2 + 1} = \frac{80}{399}$$

15. 함수 $f(x) = |x-1|$ 에 대하여 방정식 $(f \circ f)(x) = \frac{1}{2}$ 를 만족하는 모든 x 의 합을 구하면?

① 0

② 1

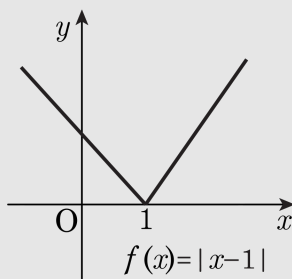
③ 2

④ 3

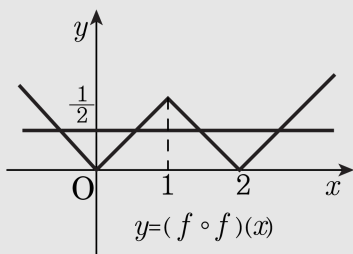
⑤ 4

해설

$y = f(x)$ 의 그래프는 다음과 같으므로



$y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$(f \circ f)(x) = \frac{1}{2}$ 의 해는 $y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프와

$y = \frac{1}{2}$ 의 그래프가 만나는 점의 x 좌표이다.

$(f \circ f)(x) = \frac{1}{2}$ 의 해는 $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$

$$\therefore -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 4$$