

1. 다음 중 명제가 아닌 것은?

- ① 6과 18의 최대공약수는 3 이다.
- ② 설악산은 제주도에 있다.
- ③ $x = 2$ 이면 $3x = 6$ 이다.
- ④ $x + 1 < 0$
- ⑤ 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180° 이다.

해설

명제는 참과 거짓을 명확하게 판단할 수 있는 문장이나 식을 말한다. ①, ②는 거짓 명제이고, ③, ⑤는 참인 명제이다. 그러나 ④는 x 의 값에 따라서 참일 수도 있고 거짓일 수도 있으므로 명제가 아니다.

2. 다음 명제 중에서 그 부정이 참인 것을 모두 고르면?

- ① $2 < \sqrt{6} \leq 3$
- ② 2는 소수가 아니다.
- ③ $2 > 3$ 또는 $3 \leq 5$
- ④ $2 \leq \sqrt{3} < 3$
- ⑤ 24는 4와 6의 공배수이다.

해설

거짓인 명제의 부정은 참이므로 거짓인 명제를 찾으면 된다. ①, ③, ⑤는 참인 명제이고, 2는 소수이고 $\sqrt{3} = 1.7\cdots$ 이므로 ②, ④는 거짓인 명제이다.

3. 명제 ‘ p 이면 q 가 아니다.’의 역인 명제의 대우를 구하면?

- ① q 가 아니면 p 이다. ② q 이면 p 가 아니다.
③ p 가 아니면 q 가 아니다. ④ p 가 아니면 q 이다.
⑤ q 이면 p 이다.

해설

$p \rightarrow \sim q \Rightarrow \sim q \rightarrow p \Rightarrow \sim p \rightarrow q \Rightarrow p$ 가 아니면 q 이다.

4. $x - 4 = 0$ 이 $x^2 + ax - 48 = 0$ 이기 위한 충분조건일 때, 실수 a 의 값은?

① 4

② 6

③ 8

④ 10

⑤ 12

해설

$$x - 4 = 0 \Rightarrow x^2 + ax - 48 = 0$$

$$\therefore 16 + 4a - 48 = 0$$

$$\therefore a = 8$$

5. ‘모든 중학생은 고등학교에 진학한다’의 부정인 명제는?

- ① 고등학교에 진학하는 중학생은 없다.
- ② 어떤 중학생은 고등학교에 진학한다.
- ③ 고등학교에 진학하지 않는 중학생도 있다.
- ④ 모든 중학생은 고등학교에 진학하지 않는다.
- ⑤ 어떤 중학생은 고등학교에 진학하지 않는다.

해설

부정이란 ‘ p 이면 q 이다’가 ‘ p 이면 q 가 아니다’이고, ‘모든’의 부정은 ‘어떤’이므로 ‘모든 중학생은(p) 고등학교에 진학한다(q)’의 부정은 ‘어떤 중학생은 고등학교에 진학하지 않는다’이다.

6. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라고 할 때, ' p 또는 $\sim q$ '를 만족하는 집합을 구하면?

① $P - Q$

② $Q - P$

③ $P^c \cup Q$

④ $P \cup Q^c$

⑤ $P \cap Q^c$

해설

조건 $\sim q$ 를 만족하는 집합이 Q^c 이므로 ' p 또는 $\sim q$ '를 만족하는 집합은 $P \cup Q^c$ 이다.

7. 다음 중 참인 명제는?

- ① 2는 홀수이다.
- ② $\sqrt{2}$ 는 유리수이다.
- ③ 99는 100보다 작다.
- ④ $\emptyset$ 은 무한집합이다.
- ⑤ 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 > 0$ 이다.

해설

③ 99는 100보다 작은 것이 사실이므로 참이다.

8. n 이 100보다 작은 자연수일 때, 다음 명제가 거짓임을 보여주는 반례는 모두 몇 가지인가?

‘ n^2 이 12의 배수이면 n 은 12의 배수이다.’

▶ 답 : 가지

▷ 정답 : 8가지

해설

명제가 거짓임을 보이는 반례는 n^2 이 12의 배수이면서 n 이 12의 배수가 아닌 수를 찾으면 된다. 즉, n 은 6의 배수이면서 12의 배수가 아닌 수를 찾으면 된다.

$n \in \{6 \times 1, 6 \times 3, 6 \times 5, 6 \times 7, 6 \times 9, 6 \times 11, 6 \times 13, 6 \times 15\}$

9. 명제 ‘모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + 5 \geq k$ 이다.’는 참이고 ‘어떤 실수 x 에 대하여 $x^2 + k \leq 2$ 이다.’는 거짓일 때, 실수 k 의 값의 범위는?

- ① $-5 \leq k < -2$ ② $-5 < k \leq -2$ ③ $-2 \leq k < 2$
④ $2 < k \leq 5$ ⑤ $2 \leq k < 5$

해설

부등식 $x^2 \geq k-5$ 가 모든 실수 x 에 대하여 성립하려면 $k-5 \leq 0$ 이어야 한다.

$\therefore k \leq 5 \cdots \text{㉠}$

명제 ‘어떤 실수 x 에 대하여 $x^2 + k \leq 2$ 이다.’가 거짓이므로 그 부정인 명제 ‘모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + k > 2$ 이다.’는 참이다. 따라서, $x^2 > 2-k$ 가 모든 실수 x 에 대하여 성립하려면 $2-k < 0$ 이어야 한다.

$\therefore k > 2 \cdots \text{㉡}$

㉠, ㉡으로부터 구하는 k 의 값의 범위는 $2 < k \leq 5$

10. 두 실수 x, y 에 대하여 다음 명제가 참일 때, 실수 k 의 최솟값을 구하여라.

$x + y < 8$ 이면 $x < -2$ 또는 $y < k$

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

주어진 명제가 참이므로 대우도 참이다.
따라서 $x \geq -2$ 이고 $y \geq k$ 이면 $x + y \geq 8$
 $x \geq -2, y \geq k$ 에서 $x + y \geq k - 2$ 이므로
 $k - 2 \geq 8, \therefore k \geq 10$
따라서 k 의 최솟값은 10이다.

11. 두 명제 $p \rightarrow q$ 와 $\sim r \rightarrow \sim q$ 가 모두 참일 때, 다음 중 ‘반드시 참이다’라고 말할 수 없는 명제는?

① $q \rightarrow r$

② $p \rightarrow r$

③ $\sim p \rightarrow \sim r$

④ $\sim r \rightarrow \sim p$

⑤ $\sim q \rightarrow \sim p$

해설

$p \rightarrow q \leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$
 $\sim r \rightarrow \sim q \leftrightarrow q \rightarrow r$
 $p \rightarrow q, q \rightarrow r$
이므로

$p \rightarrow r \leftrightarrow r \rightarrow \sim p$

12. $x + 3 \neq 0$ 이 $x^2 + ax - 6 \neq 0$ 이기 위한 필요조건일 때, 상수 a 의 값을 구하면?

① -2

② -1

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$x^2 + ax - 6 \neq 0$ 이면 $x + 3 \neq 0$ 이다.(참)

대우 : $x + 3 = 0$ 이면 $x^2 + ax - 6 = 0$ 이다.(참)

$x^2 + ax - 6 = 0$ 에 $x = -3$ 대입 $\therefore a = 1$

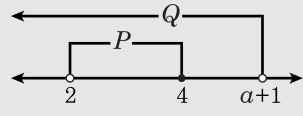
부정문으로 된 명제는 대우를 사용하여 긍정문으로 바꾸면 판단하기가 쉬워진다.

13. 두 조건 $p : 2 < x \leq 4, q : x < a + 1$ 에 대하여 p 는 q 이기 위한 충분조건 일 때, 실수 a 의 값의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a > 3$

해설



$p \rightarrow q$ 이므로 $a + 1 > 4 \Rightarrow a > 3$

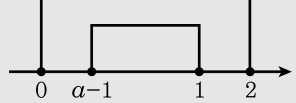
14. $0 \leq x \leq 2$ 이기 위한 충분조건이 $a - 1 \leq x \leq 1$ 이고, 필요조건이 $b + 3 \leq x \leq 3$ 이다. a 의 최솟값을 m , b 의 최댓값을 M 이라고 할 때, $m + M$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $m + M = -2$

해설

$0 \leq x \leq 2$ 이기 위한 충분조건이 $a - 1 \leq x \leq 1$ 이므로
 $\{x \mid a - 1 \leq x \leq 1\} \subset \{x \mid 0 \leq x \leq 2\}$



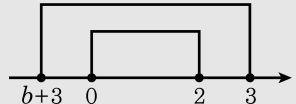
위의 그림에서 $0 \leq a - 1 \leq 1$

$\therefore 1 \leq a \leq 2 \cdots \textcircled{㉠}$

또, $0 \leq x \leq 2$ 이기 위한 필요조건이

$b + 3 \leq x \leq 3$ 이므로

$\{x \mid 0 \leq x \leq 2\} \subset \{x \mid b + 3 \leq x \leq 3\}$



위의 그림에서 $b + 3 \leq 0$

$\therefore b \leq -3 \cdots \textcircled{㉡}$

$\textcircled{㉠}$ 에서 a 의 최솟값 $m = 1$,

$\textcircled{㉡}$ 에서 b 의 최댓값 $M = -3$

$\therefore m + M = 1 + (-3) = -2$

15. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 p 는 r 이기 위한 충분조건, q 는 r 이기 위한 충분조건, s 는 r 이기 위한 필요조건, q 는 s 이기 위한 필요조건이다. 이 때, q 는 p 이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

▶ 답: 조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

$$P \subset R \subset S \subset Q \therefore P \subset Q \text{ 이므로 } P \subset Q$$

$$\therefore q \text{ 는 } p \text{ 이기 위한 필요조건}$$

16. 조건 p, q, r, s 에 대하여 p 는 q 이기 위한 충분조건, q 는 r 이기 위한 필요조건, r 은 s 이기 위한 필요조건, s 는 q 이기 위한 필요조건일 때, q 는 s 이기 위한 (가)조건이고, s 는 p 이기 위한 (나)조건이다. 이때, (가), (나)에 알맞은 것을 차례대로 적은 것은?
- ① 필요, 필요충분

② 필요충분, 충분

③ 필요, 충분

④ 필요충분, 필요

⑤ 충분, 필요충분

해설

p 는 q 이기 위한 충분조건이므로 $p \Rightarrow q \dots\dots㉠$
같은 방법으로 $r \Rightarrow q \dots\dots㉡$
 $s \Rightarrow r \dots\dots㉢$
 $q \Rightarrow s \dots\dots㉣$
㉣에서 $q \Rightarrow s$ 이고 ㉡, ㉢에서 $s \Rightarrow q$ 이므로 q 는 s 이기 위한 필요충분조건(가)
또, $p \Rightarrow q \Rightarrow s$ 이므로 s 는 p 이기 위한 필요조건(나)

17. 다음 ㉞, ㉟에 알맞은 것끼리 짝지어진 것은?

네 조건 p, q, r, s 에 대하여 p 는 r 이기 위한 충분조건, q 는 r 이기 위한 충분조건, s 는 r 이기 위한 필요조건, q 는 s 이기 위한 필요조건일 때, s 는 p 이기 위한 (㉞) 조건이며 p 는 q 이기 위한 (㉟) 조건이다.

- ① 필요, 필요

② 필요, 충분

③ 충분, 필요

④ 충분, 충분

⑤ 필요충분, 충분

해설

네 조건 p, q, r, s 를 만족하는 집합은 각각 P, Q, R, S 라고 하면 $p \subset R, Q \subset R, S \supset R, Q \supset S, P \subset R, R \subset S$ 이므로 $P \subset S$ 따라서 S 는 r 이기 위한 필요조건이다.
 $Q \subset R, R \subset S, S \subset Q$ 이므로 $Q = R = S$
 $P \subset R$ 이므로 $P \subset Q$ 따라서 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

18. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 p, q 는 각각 r 이기 위한 충분조건, s 는 r 이기 위한 필요조건, q 는 s 이기 위한 필요조건이다. 이때, p 는 q 이기 위한 어떤 조건인지를 말하여야라.

▶ 답: 조건

▷ 정답 : 충분조건

해설

p 는 r 이기 위한 충분조건이므로 $p \Rightarrow r$

q 는 r 이기 위한 충분조건이므로 $q \Rightarrow r$

s 는 r 이기 위한 필요조건이므로 $r \Rightarrow s$

q 는 s 이기 위한 필요조건이므로 $s \Rightarrow q$

따라서, $p \Rightarrow r \Rightarrow s \Rightarrow q$

$$\therefore p \Rightarrow q$$

그러나 $q \Rightarrow p$ 인지는 알 수 없다.

$\therefore p$ 는 q 이기 위한 충분조건이다.

19. 세 조건 p, q, r 을 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 이라 하면 $P \cap Q = P, Q \cup R = R$ 이 성립한다. 이 때, 다음 중 항상 참인 명제는?

① $\sim p \rightarrow \sim q$

② $q \rightarrow p$

③ $q \rightarrow \sim r$

④ $\sim r \rightarrow \sim p$

⑤ $\sim p \rightarrow \sim r$

해설

$P \cap Q = P$ 이면 $P \subset Q$

$Q \cup R = R$ 이면 $Q \subset R$

$p \Rightarrow q, q \Rightarrow r$ 이므로 $p \Rightarrow r$ 이다.

$\therefore$ 대우 : $\sim r \rightarrow \sim p$ 도 참이다.

20. 다음은 명제 ‘정수 x, y, z 에 대하여 $x^2 + y^2 = z^2$ 이면 x, y, z 중 적어도 하나는 3의 배수이다.’가 참임을 대우를 이용하여 증명한 것이다. (가) ~ (마)에 들어갈 말로 틀린 것은?

주어진 명제의 대우인 ‘정수 x, y, z 에 대하여 x, y, z 가 모두 3의 배수가 아니면 (가)이다.’가 참임을 증명해 보자.
 x, y, z 가 모두 3의 배수가 아니면,
 x, y, z 는 각각 $x = 3l \pm 1, y = 3m \pm 1, z = 3n \pm 1$ (l, m, n 은 정수)로 나타낼 수 있다.
이때,
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (3l \pm 1)^2 + (3m \pm 1)^2 \\ &= 9l^2 \pm 6l + 1 + 9m^2 \pm 6m + 1 \\ &= 9(l^2 + m^2) \pm 6(l + m) + 2 \end{aligned}$$

또는
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (\text{나}) \\ &= (\text{다}) \\ &= 9(l^2 + m^2) \pm 6(l - m) + 2 \end{aligned}$$

한편,
$$z^2 = (3n \pm 1)^2 = 9n^2 \pm 6n + 1$$

따라서, $x^2 + y^2 \neq z^2$ 이므로 주어진 명제의 대우는 (라)이다.
그러므로 주어진 명제 ‘ $x^2 + y^2 = z^2$ 이면 x, y, z 중 적어도 하나는 3의 배수이다.’는 (마)이다.

- ① (가) $x^2 + y^2 \neq z^2$
② (나) $(3l \pm 1)^2 + (3m \pm 1)^2$
③ (다) $9l^2 \pm 6l + 1 + 9m^2 \mp 6m + 1$
④ (라) 참
⑤ (마) 참

해설

$x^2 + y^2$ 는 $(3l \pm 1)^2 + (3m \pm 1)^2$ 또는 $(3l \pm 1)^2 + (3m \mp 1)^2$

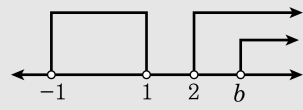
21. $-1 < x < 1$ 또는 $x > 2$ 이 되기 위한 $x > a$ 은 필요조건이고 $x > b$ 는 충분조건일 때 a 의 최댓값과 b 의 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

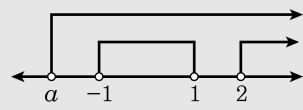
해설

$x > b$ 은 $-1 < x < 1$ 또는 $x > 2$ 이 되기 위한 충분조건에서



$$\therefore b \geq 2$$

$x > a$ 은 $-1 < x < 1$ 또는 $x > 2$ 이 되기 위한 필요조건에서



$$\therefore a \leq -1$$

$\therefore a$ 의 최댓값 : -1 , b 의 최솟값 : 2

따라서 $(-1) + 2 = 1$

22. 전체집합 U 의 임의의 세 부분집합 A, B, C 에 대하여 <보기>의 (가), (나)에 들어갈 것을 순서대로 나열한 것은?

보기

- (1) $A \subset B$ 는 $A - B = \emptyset$ 이 되기 위한 조건이다.
- (2) $B = C$ 는 $A \cup B = A \cup C$ 이 되기 위한 조건이다.

- ① 필요, 필요충분
- ② 필요, 필요
- ③ 필요충분, 필요충분
- ④ 필요충분, 충분
- ⑤ 충분, 필요충분

해설

(1)은 명제, 역 모두 성립하는 필요충분조건이고,
(2)는 역일 경우에 성립하지 않는 경우가 있으므로 충분조건이다.
(반례) 역의 경우에서 $A \supset B, A \supset C, B \subset C$ 이면 성립하지 않는다.

23. 민주, 한결, 은하, 겨레 4명의 학생은 각자가 적당한 시간에 봉사활동에 다녀오기로 하였으나 그 중 한명이 참석하지 못하였다. 그런데 네 명의 학생은 아래와 같이 서로 엇갈린 주장을 하고 있다. 이 진술 중 오직 하나만이 옳은 것일 때, 참석하지 못한 학생과 옳게 진술한 학생은?
- 민주: 한결이가 빠졌어.
한결: 민주가 한 말은 거짓말이야.
은하: 민주가 빠졌어.
겨레: 나는 안 빠졌어.
- ① 겨레, 한결 ② 겨레, 민주 ③ 겨레, 은하
④ 민주, 한결 ⑤ 민주, 은하

해설

㉠ 민주가 참 : 한결, 겨레가 빠진것이 되어 모순
㉡ 한결이 참 : 겨레가 빠짐
㉢ 은하가 참 : 민주의 진술에 대해 참, 거짓이 모순
㉣ 겨레가 참 : 민주의 진술에 대해 참, 거짓이 모순
∴ 한결의 진술이 참, 겨레가 참석하지 못함.

24. 다음 보기는 p 가 q 이기 위한 어떤 조건인가를 말하고 있다. 올바른 것의 개수는 몇 개인가?(단, a, b, x, y 는 실수)

보기

- ㉠ $p : a + b > 2, q : a > 1, b > 1$ (충분조건)
- ㉡ $p : a$ 는 4 의 배수, $q : a$ 는 짝수 (충분조건)
- ㉢ $p : (A \cup B) - (A \cap B) = \emptyset, q : A = B$ (필요충분조건)
- ㉣ $p : a < b, q : |a| < |b|$ (필요충분조건)
- ㉤ $p : |x - 1| = 2, q : x^2 - 2x + 3 = 0$ (필요조건)
- ㉥ $p : x = 1$ 이고 $y = 1, q : x + y = 2$ 이고 $xy = 1$ (필요조건)

- ① 2개 ② 3개 ③ 4개 ④ 5개 ⑤ 6개

해설

각 조건에 대한 대우가 참인지 확인하고 반례를 찾는다.

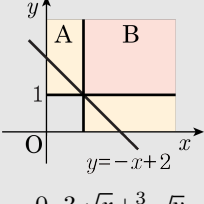
- ㉠ 반례 : $a = 0, b = 3 \therefore$ 필요조건 (거짓)
- ㉡ 대우 : a 가 홀수이면 4의 배수가 아니다. (참)
- ㉢ $(A \cup B) - (A \cap B) = \emptyset \Rightarrow (A \cup B) \subset (A \cap B)$
 $\therefore A = B$ (참)
- ㉣ 반례 : $a = -3, b = 1$ (거짓)
- ㉤ $|x - 1| = 2$ 의 해집합 $P = \{-1, 3\}$
 $x^2 - 2x + 3 = 0$ 의 해집합 $Q = \emptyset$
- ㉥ $x + y = 2$ 이고 $xy = 1$ 을 연립하면
 $y = 2 - x, x(2 - x) = 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$
 $\therefore x = 1, y = 1$ 이므로 필요충분조건 (거짓)

따라서 옳은 것은 3개

25. x, y 가 실수일 때, 다음 조건 중에서 조건 A 가 조건 B 이기 위한 필요충분조건인 것은?
- ① $A : x + y > 2 \quad B : x > 1$ 이고 $y > 1$
 - ② $A : |x| + |y| = 0 \quad B : {}^3\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 0$
 - ③ $A : x + y > 0$ 이고 $xy > 0 \quad B : x > 0$ 이고 $y > 0$
 - ④ $A : xy > x + y > 4 \quad B : x > 2$ 이고 $y > 2$
 - ⑤ $A : x + y > 2 \quad B : x > 2$ 또는 $y > 1$

해설

① 그림에서 이다. 즉, $B \subset A$ 이므로 A 는 B 이기 위한 필요조건



② $|x| + |y| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0, y = 0, 3\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 0$ 을 만족시키는 x, y 는 $x = 0, y = 0$ 이외에도 $x = 8, y = -8, \dots$ 등이 있다. $\therefore A \overset{\circ}{\leftarrow} B$ (충분조건)

③ A 는 x 축, y 축을 제외한 제1 사분면을 나타 내므로 B 와 동치이다.

④ $\therefore A \overset{\circ}{\leftarrow} B$ 이다.(필요조건) (반례) $x = 4, y = \frac{3}{2}$ 이다.

$xy > x + y > 4$ 이지만, $x > 2, y < 2$ 이다.

⑤ (충분조건) (반례) $x = 3, y = -4$ 는 B 를 만족 시키지만 A 를 만족시키지 않는다. $\therefore A \overset{\circ}{\leftarrow} B$