1. 원 $(x-1)^2+(y+2)^2=5$ 을 x 축 방향으로 2 , y 축 방향으로 5 만큼 평행이동 했을 때, 이 원의 중심의 좌표를 (a, b) 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a+b=6$

해설

원의 중심 $(1, -2)$ 를 x 축으로 2, y 축으로 5 평행 이동시키면, $(1, -2) \to \ (3, 3)$

$\therefore a=3, b=3, a+b=6$

2. 점 $(-1, 2)$ 를 원점에 대해 대칭 이동시킨 후, 다시 x 축 방향으로 a 만큼 평행 이동시켰다. 그 후 다시 x 축에 대하여 대칭 이동시킨 후, $y = x$ 에 대해 대칭이동 시켰더니 $(b, 1)$ 이 되었다. 이 때, 상수 $a + b$ 의 값을 구하면?

① -1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$(-1,\ 2)$ 을 원점대칭이동 $\to (1,\ -2)$
x축 방향으로 a 만큼 평행이동 $\to (1+a,\ -2)$
x 축에 대해 대칭이동 $\to (1+a,\ 2)$
$y = x$ 에 대해 대칭이동 $\to (2,\ 1+a)$
따라서 $b = 2,\ 1 + a = 1,\ a = 0$ 이므로 $a + b = 2$

3. 점 $\mathrm{A}(1,\ 2)$를 직선 $4x-2y-5=0$에 대하여 대칭이동한 점을 B라 할 때, 선분 AB의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{5}$

해설

점 $\mathrm{A}(1,\ 2)$를 직선 $4x-2y-5=0$에 대하여
대칭이동한 점을 $\mathrm{B}(a,\ b)$라 하면,

$\overline{\mathrm{AB}}$의 중점 $\left(\frac{1+a}{2},\ \frac{2+b}{2}\right)$가

직선 $4x-2y-5=0$ 위에 있으므로

$4\cdot\frac{1+a}{2}-2\cdot\frac{2+b}{2}-5=0$

$\therefore\ 2a-b=5\ \cdots$ ㉠

또한, 직선 AB와 직선 $4x-2y-5=0$이

수직이므로 $\frac{b-2}{a-1}\times 2=-1$

$\therefore\ a+2b=5\ \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3,\ b=1$

$\therefore\ \mathrm{B}(3,\ 1)$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(3-1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{5}$

4. 다음은 갑, 을, 병, 정 네 사람이 도형의 이동에 대하여 말한 것이다. 올바르게 말한 사람은?

> 갑 : 점 $(x,\ y)$ 를 점 $(x-a, y-b)$ 로 옮기는 평행이동에 의하여 $f(x,y)=0$ 이 나타내는 도형은 $f(x+a, y+b)=0$ 이 나타내는 도형으로 이동 한다.
> 을 : 점 (x,y) 를 점 $(x-2, y+1)$ 로 옮기는 평행이동에 의하여 점 $(2,-1)$ 은 점 $(0,0)$ 으로 이동한다.
> 병 : 점 (x,y) 를 점 $(-x,-y)$ 로 옮기는 대칭이동에 의하여 $y=f(x)$ 이 나타내는 도형은 $y=-f(-x)$ 이 나타내는 도형으로 이동한다.
> 정 : 점 (x,y) 를 점 (y,x) 로 옮기는 대칭이동에 의하여 $f(x,y)=0$ 이 나타내는 도형은 $f(y,x)=0$ 이 나타내는 도형으로 이동한다.

① 갑, 을, 병　　② 갑, 을, 정　　③ 갑, 병, 정
④ 을, 병, 정　　⑤ 갑, 을, 병, 정

해설

갑, 을, 정 : 참
병 : $(x,y) \rightarrow (-x,-y)$: 원점 대칭
$\therefore\ y=f(x) \rightarrow -y=f(-x)$: 거짓

5. 다음은 두 학생 갑과 을 사이의 집합에 관한 논쟁 중에서 그 일부를 적은 것이다.

> 갑 : 우리가 생각할 수 있는 집합들 전체의 집합을 S 라 하자. 그러면 <u>S 는 S 자신을 원소로 갖는다</u>.(㉠) 그렇지?
> 을 : 그건 말도 안돼. 그런 게 어디 있냐?
> 갑 : 좋 아. 그 러 면 <u>자기 자신을 원소로 갖지 않는 집합들 전체의 집합</u>(㉡) 은 어떠냐?

위의 논쟁에서 밑줄 친 부분 (㉠), (㉡) 에 대한 수학적 표현으로 적절한 것은?

① $S \in S$, $\{A|A \notin A$, A는 집합$\}$

② $S \in S$, $\{A|A \not\subset A$, A는 집합$\}$

③ $S \in S$, $\{A|A \in A$, A 는 집합$\}$

④ $S \subset S$, $\{A|A \notin A$, A는 집합$\}$

⑤ $S \subset S$, $\{A|A \subset A$, A는 집합$\}$

해설

(㉠) S 는 S 자신을 원소로 갖는다 → $S \in S$
(㉡) 자기 자신을 원소로 갖지 않는 집합들 전체의 집합 → $\{A|A \notin A$, A 는 집합$\}$
[참고] 러셀의 패러독스를 표현한 내용이다. 러셀은 이것을 ‘이발사의 예화’를 통해 설명했다.

6. 다음 보기에서 집합에 대한 설명으로 옳지 않은 것은?

보기

㉠ $n(\{0\}) = 1$

㉡ $\{1, 2\} \supset \{2, 1\}$

㉢ $\{1, 2, 3, \cdots 100\} \supset \{1, 100\}$

㉣ $n(\{2, 3, 5, 7\}) = n(\{0, \{\varnothing\}, \varnothing, \{0\}\})$

㉤ $n(\{1, 10, \{1, 10\}\}) = 4$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉤

해설

㉤ $n(\{1, 10, \{1, 10\}\}) = 3$

7. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $n(U) = 20, n(A \cup B) = 18, n(A \cap B^c) = 7$ 일 때, $n(A^c \cap B^c)$ 은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} n(A^c \cap B^c) &= n((A \cup B)^c) \\ &= n(U) - n(A \cup B) \\ &= 20 - 18 = 2 \text{ 이다.} \end{aligned}$$

8. 명제 '모든 학생들은 수학을 좋아한다.' 의 부정으로 옳은 것은?

① 모든 학생들은 수학을 좋아하지 않는다.
② 모든 학생들은 영어를 좋아한다.
③ 어떤 학생들은 수학을 좋아한다.
④ 어떤 학생들은 수학을 좋아하지 않는다.
⑤ 어떤 학생들은 영어를 좋아한다.

해설

'모든' 의 부정은 '어떤' 이므로 주어진 명제의 부정은 '어떤 학생들은 수학을 좋아하지 않는다.' 이다.

9. 명제 '$|x-3|<a$ 이면 $1<x<7$이다.' 가 참이 되기 위한 양수 a의 최댓값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$-a<x-3<a \Rightarrow 3-a<x<3+a$

$\{x|3-a<x<3+a\} \subset \{x|1<x<7\}$

$\therefore 1 \le 3-a$과 $3+a \le 7$을 동시에 만족해야 한다.

$\therefore a \le 2$

10. 실수 a, b 에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

㉠ $\lvert a\rvert^2 = a^2$	㉡ $\lvert ab\rvert \ge ab$
㉢ $\lvert a\rvert + \lvert b\rvert \ge \lvert a-b\rvert$	㉣ $\lvert a\rvert - \lvert b\rvert \ge \lvert a-b\rvert$

① ㉠, ㉡　② ㉡, ㉢　③ ㉠, ㉡, ㉢
④ ㉠, ㉢, ㉣　⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

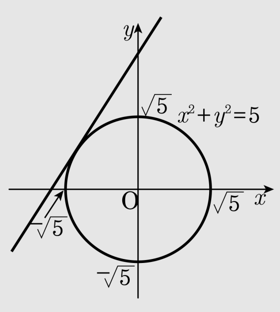
㉣ $(\lvert a\rvert - \lvert b\rvert)^2 - \lvert a-b\rvert^2$
$= \lvert a\rvert^2 - 2\lvert a\rvert\lvert b\rvert + \lvert b\rvert^2 - (a-b)^2$
$= 2(ab - \lvert ab\rvert) \le 0$

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉡, ㉢ 이다.

11. 직선 $y = 2x + 8$ 을 x 축의 방향으로 m 만큼 평행이동한 직선 l_1 과 y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 직선 l_2 가 모두 원 $x^2 + y^2 = 5$ 와 제2 사분면에서 접한다. 이 때, $m + n$ 의 값은?

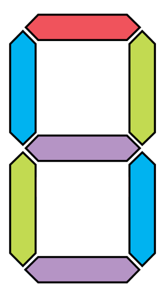
① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

해설



직선 $y = 2x + 8$ 을 평행이동하면 원 $x^2 + y^2 = 5$ 와 접하므로 접선의 기울기는 2 이다.
원 $x^2 + y^2 = 5$ 와 제2 사분면에서 접하고 기울기가 2 인 접선의 방정식은
$y = 2x + \sqrt{5} \cdot \sqrt{1 + 2^2}$
즉, $y = 2x + 5$ 이고,
이것이 두 직선 l_1, l_2 와 일치한다.
이때, 직선 $y = 2x + 8$ 을 x 축의 방향으로 m 만큼 평행이동한 직선의 방정식은
$y = 2(x - m) + 8$ $\quad \therefore l_1 : y = 2x - 2m + 8$
이것이 직선 $y = 2x + 5$ 와 일치하므로
$-2m + 8 = 5$ $\quad \therefore m = \frac{3}{2}$
또한, 직선 $y = 2x + 8$ 을 y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 직선의 방정식은
$y - n = 2x + 8$ $\quad \therefore l_2 : y = 2x + 8 + n$
이것이 직선 $y = 2x + 5$ 와 일치하므로
$8 + n = 5$ $\quad \therefore n = -3$
$\therefore m + n = \frac{3}{2} - 3 = -\frac{3}{2}$

12. 다음 그림과 같이 빨강, 초록, 파랑, 보라 4개의 전등으로 구성된 숫자판이 있다. 세 집합 A, B, C 가 각각 다음과 같을 때, $\square$ 안에 기호 $\subset$, $=$ 중 알맞은 것을 차례대로 써넣어라.



$A = \{x \mid x$
는 숫자 4를 나타낼 때 켜지는 전등의 색$\}$
$B = \{x \mid x$
는 숫자 5를 나타낼 때 켜지는 전등의 색$\}$
$C = \{x \mid x$
는 숫자 6을나타낼 때 켜지는 전등의 색 $\}$

$A \square C$

$B \square C$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $\subset$

▷ 정답 : $\subset$

해설

집합 A, B, C를 각각 원소나열법으로 나타내면
$A = \{$파랑 , 보라 , 초록$\}$,
$B = \{$빨강 , 파랑 , 보라$\}$,
$C = \{$빨강 , 파랑 , 보라 , 초록$\}$ 이다.
따라서 $A \subset C, B \subset C$ 이다.

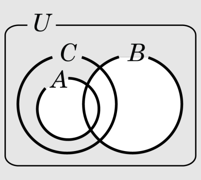
13. 세 집합 A, B, C 가 $(A \cap B) \subset (A \cap C)$, $(A \cup C) \subset (B \cup C)$ 를 만족한다. 이 사실로 알 수 있는 것은?

① $A \subset B$　　② $B \subset A$　　③ $A \subset C$

④ $C \subset A$　　⑤ $B \subset C$

해설

벤다이어그램에서 $(A \cap B) \subset (A \cap C)$ 이고
$(A \cup C) \subset (B \cup C)$ 가 되려면
$A = A \cap C$ 이어야 하므로
$\therefore\ A \subset C$



14. 집합 $A = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$, $B = \{1,\ 3,\ 5\}$ 에 대하여 다음을 만족하는 집합 C 의 개수를 구하여라.

㉠ $B \not\subset C$	㉡ $C \subset A$	㉢ $1 \in C,\ 3 \in C$

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 4 개

해설

㉠과 ㉢에 의하여 $1 \in C,\ 3 \in C,\ 5 \notin C$ 이다.
따라서, 집합 C 는 1 과 3 을 포함하고 5 를 포함하지 않는 A 의 부분집합이므로 $2^{5-2-1} = 2^2 = 4$ (개) 이다.

15. 두 집합 $A = \{x | x$는 10 이상 15 이하의 자연수$\}$, $B = \{x | x$는 12 이상 18 미만의 3의 배수$\}$에 대하여 다음 조건을 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

조건

$X \subset A, \quad B \subset X, \quad n(X) = 4$

▶ 답 : ____ 개

▷ 정답 : 6 개

해설

$A = \{10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15\}$
$B = \{12,\ 15\}$
$X \subset A,\ B \subset X$ 이므로 $B \subset X \subset A$
$\{12,\ 15\} \subset X \subset \{10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15\}$
집합 X 는 집합 A 의 부분집합 중 원소 12, 15 는 반드시 포함하고 원소의 개수가 4 개인 집합이므로
$\{10,\ 11,\ 12,\ 15\}$, $\{10,\ 12,\ 13,\ 15\}$,
$\{10,\ 12,\ 14,\ 15\}$, $\{11,\ 12,\ 13,\ 15\}$,
$\{11,\ 12,\ 14,\ 15\}$, $\{12,\ 13,\ 14,\ 15\}$의 6 개이다.

16. 전체집합 $\{x \mid 1 \le x \le 10,\ x \text{ 는 정수}\}$ 의 두 부분집합 $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{3, 4, 6\}$ 가 있다. $A \cup X = B \cup X$ 가 성립하는 U 의 부분집합 X 의 개수를 구하면?

① 16 개 ② 32 개 ③ 64 개
④ 128 개 ⑤ 256 개

해설

$A \cup X = B \cup X$ 가 성립하려면 X 에 $A \cap B$ 의 원소는 들어 있어도 되고 들어 있지 않아도 상관없다. 그러나 그 외의 A, B 의 원소는 반드시 들어 있어야 한다. 즉 집합 X 는 $2, 3, 8, 10$ 이 모두 포함된 U 의 부분집합이다.
$\therefore \{1, 4, 5, 6, 7, 9\}$ 의 부분집합의 개수와 같다.
따라서 $2^6 = 64$(개) 이다.

17. 자연수로 이루어진 집합 $A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \cdots,\ 2n\}$ 의 부분집합 중에서 원소 $2(n-1)$ 과, $2n$ 을 포함하지 않은 부분집합의 개수가 32 일 때, n 의 값을 구하면?

① 10　② 14　③ 18　④ 22　⑤ 26

해설

집합 A 의 원소의 개수가 n 개이므로
$2^{n-2}=32=2^5$ 이다.
$\therefore\ n-2=5$
$\therefore\ n=7$
원소의 개수가 7 개이므로 $A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14\}$, $n=14$ 이다.

18. 세 집합 $A = \{x \mid x\text{는 } 6 \text{ 이하의 자연수}\}$, $B = \{2,\ 4,\ 5,\ 8\}$, $C = \{x \mid x\text{는 홀수}\}$ 일 때, $A \cap (B \cup C)$ 는?

① $\{2,\ 4\}$　　② $\{2,\ 3,\ 4\}$

③ $\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$　　④ $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

⑤ $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 8\}$

해설

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 5, 8\}$, $C = \{1, 3, 5, 7, 9, 11 \cdots\}$
$A \cap (B \cup C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, \cdots\} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

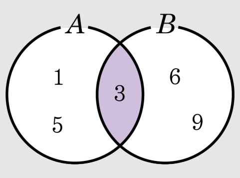
19. 두 집합 A, B에 대하여 $A = \left\{x \mid x\text{는 5 이하의 홀수}\right\}$, $A \cap B = \{3\}$, $A \cup B = \{1, 3, 5, 6, 9\}$일 때, 집합 B를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\{3,\ 6,\ 9\}$

해설

$A = \{1, 3, 5\}$이고, 주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 $B = \{3, 6, 9\}$이다.

20. 다음 [보기] 에서 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $n(\{0\}) = 0$	㉡ $\phi \subset \{\varnothing\}$	㉢ $4 \subset \{1,\ 2\}$
㉣ $0 \subset \{0\}$	㉤ $0 \in \varnothing$	㉥ $0 \notin \varnothing$

① ㉡,㉥ ② ㉡,㉤ ③ ㉠,㉡ ④ ㉢,㉤ ⑤ ㉤,㉦

해설

㉠ $n\{\,(0)\,\} = 1$
㉢ $4 \notin \{1, 2\}$
㉣ $0 \in \{0\}$
㉤ $0 \notin \varnothing$

21. 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

① $(A \cup B) \supset A$

② $A - B = A \cap B^C$

③ $\varnothing^C = U$

④ $A - B = B - A$

⑤ $A \subset B$이면 $A \cap B = A$

해설

$A = \{1,\ 2\}$, $B = \{2,\ 3\}$이면

$A - B = \{1\}$, $B - A = \{3\}$

$\therefore\ A - B \neq B - A$

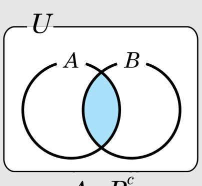
22. 전체집합 U 의 공집합이 아닌 두 부분집합 A, B 에 대하여 다음 중에서 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $A-B^c=A\cap B$ ② $A\cup(A\cap B)=A\cap(A\cup B)$

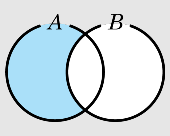
③ $A^c\cap(A\cup B)=A-B$ ④ $(A^c\cap B)-A=B\cap A^c$

⑤ $(A-B)^c=A^c\cup B$

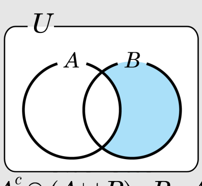
해설

①


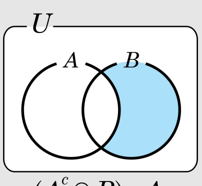
$A-B^c$

②


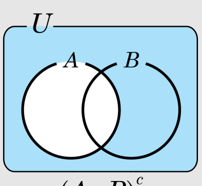
$A\cup(A\cap B)$

③


$A^c\cap(A\cup B)=B-A$

④


$(A^c\cap B)-A$

⑤


$(A-B)^c$

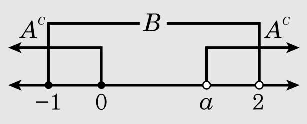
23. 실수 전체의 집합R의 두 부분집합 $A = \{x|0 < x \leq a\}$, $B = \{x| -1 \leq x < 2\}$ 가 $A^c \cup B = R$를 만족할 때, a의 값의 범위를 구하면? (단, $A \neq \varnothing$)

① $0 \leq a < 2$　　② $0 < a \leq 2$　　③ $0 \leq a \leq 2$

④ $0 < a < 2$　　⑤ $-1 \leq a < 5$

해설

$A \neq \varnothing$이므로, $a > 0$ 또 $A^c = \{x|x \leq 0$ 또는 $x > a\}$



위의 그림에서 $A^c \cup B = R$가 되려면, $0 < a < 2$

해설

$A^c \cup B = R \leftrightarrow A \subset B$ 임을 이용하여 구할 수 있다.

24. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $n(U) = 30,\ n((A \cup B) \cap (A \cap B)^c) = 21,\ n(A \cup B) = 25$ 일 때, $n(A^c \cup B^c)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 26

해설

$(A \cup B) \cap (A \cap B)^c = (A \cup B) - (A \cap B)$ 이므로
$n((A \cup B) \cap (A \cap B)^c) = 21$ 이고 $n(A \cup B) = 25$ 이면 $n(A \cap B) = 4$ 이다.
$\therefore n(A^c \cup B^c) = n((A \cap B)^c) = 30 - 4 = 26$

25. 은지네반 35 명의 학생의 생활습관 조사를 하였다. 11 시 이전에 자는 학생이 18 명이고, 아침밥을 매일 먹는 학생이 22 명이었다. 이때, 11 시 이전에 자고 아침밥을 매일 먹는 최대 인원수를 a, 최소 인원수를 b 라고 할 때, a, b 를 각각 구하여라.

▶ 답 :

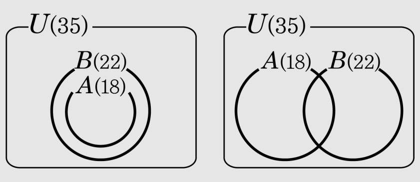
▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 18$

▷ 정답 : $b = 5$

해설

11 시 이전에 자는 학생의 집합을 A, 아침밥을 매일 먹는 학생의 집합을 B 라고 할 때, 교집합의 개수의 최대, 최소는 다음 벤 다이어그램을 보면 알 수 있다.



11 시 이전에 자는 학생 18 명 모두 아침밥을 먹는다고 가정했을 때, 최대인원수는 18 명이다. 35 명의 학생 중 적어도 한 명은 11 시 이전에 자거나 아침밥을 먹는다고 가정하면, 최소 인원수는 $18 + 22 - 35 = 5$ (명) 이다.

26. 세 조건 p, q, r 를 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 라고 하면 $P \cup Q = P, Q \cap R = R$ 인 관계가 성립한다. 이 때, 다음 중 반드시 참인 명제가 아닌 것은?

① $r \to p$　　② $\sim p \to \sim q$　　③ $\sim p \to \sim r$

④ $\sim r \to \sim p$　　⑤ $\sim q \to \sim r$

해설

$P \cup Q = P, Q \cap R = R$ 이면
$Q \subset P, R \subset Q$ 이므로 $q \to p$, $r \to q$ 가 참
$R \subset Q \subset P$ 이므로 $r \to p$ 가 참
$Q \subset P, R \subset Q$ 이면 $Q^c \supset P^c, R^c \supset Q^c$ 이므로 $\sim p \to \sim q$, $\sim q \to \sim r$ 이 참

해설

'주어진 명제가 참일 때, 그 대우도 참'을 이용하여 $q \to p$, $r \to q$ 가 참이면 $\sim p \to \sim q$, $\sim q \to \sim r$ 가 참임을 쉽게 판단할 수 있다.

27. P섬에 사는 사람들은 오직 진실만을 말하고, Q섬에 사는 사람들은 오직 거짓만을 말한다. 이 두 섬으로부터 온 세 사람 A, B, C가 있다. A, B는 다음과 같이 말했다.

A : 우리는 모두 Q섬에서 왔다.B : 우리들 중 오직 한 사람만이 P섬에서 왔다.

A, B, C는 각각 어느 섬으로부터 왔는가?

① A,B는 P섬, C는 Q섬에서 왔다.

② A,B는 Q섬, C는 Q섬에서 왔다.

③ A,B,C는 모두 Q섬에서 왔다.

④ B는 P섬, A,C는 Q섬에서 왔다.

⑤ B는 Q섬, A,C는 P섬에서 왔다.

해설

A의 말은 거짓이다. 즉, A는 Q섬 사람이고 '우리 모두 Q섬 사람이다.'가 거짓이므로 B, C중 P섬 사람이 있어야 한다. 만일 B가 P섬 사람이면 B의 말이 진실이므로 C는 Q섬에서 왔다. 그러나 B가 Q섬에서 왔다면 B의 말이 거짓이므로 P섬 사람이 둘 이상이어야 하는데 A와 B가 Q섬 사람이므로 모순이다. 따라서, B는 P섬, A,C는 Q섬에서 왔다.

28. 다음은 명제 '정수 $x,\ y,\ z$에 대하여 $x^2+y^2=z^2$ 이면 $x,\ y,\ z$ 중 적어도 하나는 3의 배수이다.' 가 참임을 대우를 이용하여 증명한 것이다. (가) ~ (마)에 들어갈 말로 <u>틀린</u> 것은?

> 주어진 명제의 대우인 '정수 x, y, z에 대하여 $x,\ y,\ z$ 가 모두 3의 배수가 아니면 (가)이다.' 가 참임을 증명해 보자.
> $x,\ y,\ z$ 가 모두 3의 배수가 아니면,
> $x,\ y,\ z$ 는 각각 $x=3l\pm1$, $y=3m\pm1$, $z=3n\pm1$ ($l,\ m,\ n$ 은 정수)로 나타낼 수 있다.
> 이때,
> $$\begin{aligned} x^2+y^2 &= (3l\pm1)^2+(3m\pm1)^2 \\ &= 9l^2\pm6l+1+9m^2\pm6m+1 \\ &= 9(l^2+m^2)\pm6(l+m)+2 \end{aligned}$$
> 또는
> $$\begin{aligned} x^2+y^2 &= (\text{나}) \\ &= (\text{다}) \\ &= 9(l^2+m^2)\pm6(l-m)+2 \end{aligned}$$
> 한편,
> $z^2=(3n\pm1)^2=9n^2\pm6n+1$
> 따라서, $x^2+y^2\neq z^2$ 이므로 주어진 명제의 대우는 (라)이다.
> 그러므로 주어진 명제 '$x^2+y^2=z^2$ 이면 $x,\ y,\ z$ 중 적어도 하나는 3의 배수이다.' 는 (마)이다.

① (가) $x^2+y^2\neq z^2$

② (나) $(3l\pm1)^2+(3m\pm1)^2$

③ (다) $9l^2\pm6l+1+9m^2\mp6m+1$

④ (라) 참

⑤ (마) 참

해설

x^2+y^2 는 $(3l\pm1)^2+(3m\pm1)^2$ 또는 $(3l\pm1)^2+(3m\mp1)^2$

29. 다음 중에서 p는 q이기 위한 필요조건이고 충분조건은 아닌 것을 고르면? (단, 모든 문자는 실수)

① $p : a > 3,\ q : a^2 > 9$

② $p : a^2 = ab,\ q : a = b$

③ $p : |a| < |b|,\ q : a < b$

④ $p : |x-1| = 2,\ q : x^2 = -2$

⑤ $p : x = 1$ 이고 $y = 1,\ q : x + y = 2$ 이고 $xy = 1$

해설

① 충분조건
③ 아무런 조건관계가 아니다.
④ 아무런 조건관계가 아니다. 진리집합을 구해보면 $P = \{-1, 3\}$, $Q = \phi$ 에서 $P \supset Q$ 관계로 보아 필요조건이라고 하지 않도록 주의하자.
⑤ 필요충분조건

30. 두 조건 $p : |x^2-1| < 1$, $q : |x-1| < a$ 에 대하여 p 가 q 의 필요조건이 되도록 하는 a 의 최댓값은?

① $2-\sqrt{2}$　② $\sqrt{2}-1$　③ $\sqrt{2}+1$

④ $\sqrt{2}+2$　⑤ $\sqrt{3}-1$

해설

$p : |x^2-1| < 1$를 만족하는 해를 구하면

$-1 < x^2-1 < 1 \leftrightarrow 0 < x^2 < 2 \leftrightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$

$\therefore P = \{x| -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\}$

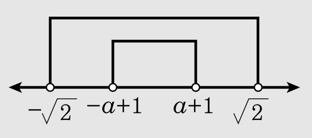
$q : |x-1| < a$를 만족하는 해를 구하면

$-a < x-1 < a \leftrightarrow -a+1 < x < a+1$

$\therefore\ Q = \{x| -a+1 \le x \le a+1\}$

p 가 q 의 필요조건이 되려면 $q \Rightarrow p$

즉 $Q \subset P$가 되어야 한다. 수직선을 그려보면



$-a+1 \ge -\sqrt{2}$이고, $a+1 \le \sqrt{2}$, 이를 각각 풀면

$a \le \sqrt{2}+1$이고 $a \le \sqrt{2}-1$이고 동시에 만족하는 a의 범위는$a \le \sqrt{2}-1$

$\therefore\ a$의 최댓값은 $\sqrt{2}-1$

31. $0 < a < b,\ a+b=1$일 때, 다음 네 수 또는 식의 대소를 비교한 것 중 잘못된 것은?

$1,\quad \sqrt{a}+\sqrt{b},\quad \sqrt{b}-\sqrt{a},\quad \sqrt{b-a}$

① $\sqrt{b}-\sqrt{a} < \sqrt{b-a}$　　② $\sqrt{b}-\sqrt{a} < \sqrt{a}+\sqrt{b}$

③ $\sqrt{a}+\sqrt{b} < 1$　　④ $\sqrt{b-a} < 1$

⑤ $\sqrt{b-a} < \sqrt{a}+\sqrt{b}$

해설

주어진 네 수는 모두 양수이므로 제곱의 대소 관계를 알아보자.

(ⅰ) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 - 1^2 = a + 2\sqrt{ab} + b - 1$
$= 2\sqrt{ab} > 0$
$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 > 1$
$\therefore\ \sqrt{a}+\sqrt{b} > 1$

(ⅱ) $1^2 - (\sqrt{b-a})^2 = 1 - b + a$
$= (a+b) - b + a$
$= 2a > 0$
$\therefore\ 1 > \sqrt{b-a}$

(ⅲ) $(\sqrt{b-a})^2 - (\sqrt{b}-\sqrt{a})^2$
$= b - a - (b - 2\sqrt{ab} + a)$
$= 2\sqrt{ab} - 2a$
$= 2\sqrt{a}(\sqrt{b}-\sqrt{a}) > 0$
$\therefore\ \sqrt{b-a} > \sqrt{b}-\sqrt{a}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $\sqrt{a}+\sqrt{b} > 1 > \sqrt{b-a} > \sqrt{b}-\sqrt{a}$

32. $x > 2$ 일 때, $x + \dfrac{1}{x-2}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$x > 2$ 에서 $x - 2 > 0$ 이므로

산술평균과 기하평균의 관계를 이용하면

$$
\begin{aligned}
x + \frac{1}{x-2} &= x - 2 + \frac{1}{x-2} + 2 \\
&\geq 2\sqrt{(x-2) \times \frac{1}{x-2}} + 2 \\
&= 2 + 2 = 4
\end{aligned}
$$

(단, 등호는 $x = 3$ 일 때 성립)

33. 좌표평면 위의 점 A$(1,\ 2)$를 지나는 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\ (a>0,\ b>0)$이 x축, y축과 만나는 점을 각각 B, C라 할 때, $\triangle$OBC의 최소 넓이는?

① 3　② 3.5　③ 4　④ 4.5　⑤ 5

해설

B$(a,\ 0)$, C$(0,\ b)$이므로
$\triangle$OBC의 넓이를 S라 하면
$S=\frac{1}{2}ab\cdots\cdots$㉠
직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$은 점 $(1,\ 2)$를 지나므로
$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1\cdots\cdots$㉡
㉠, ㉡에서
$1=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\geq 2\sqrt{\frac{2}{ab}}=2\sqrt{\frac{1}{S}}$
$\therefore\ S\geq 4$