1. 두 함수 $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = -3x + 2$ 의 합성함수 $g \circ f$ 를 구하면 무엇인가?

① $y = -6x - 1$ ② $y = -6x$ ③ $y = -6x + 1$
④ $y = -6x + 3$ ⑤ $y = -6x + 5$

해설

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = -3(2x + 1) + 2 = -6x - 1$ 이다.

2. 세 함수 $f(x) = 5x - 3$, $g(x) = -2x^2$, $h(x) = |x+5|$에 대하여 $(h \circ g \circ f)(1)$의 값은?

① 1　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 7

해설

$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(2) = -8$ 이므로

$$\begin{aligned}(h \circ g \circ f)(1) &= (h \circ (g \circ f))(1) \\ &= h((g \circ f)(1)) = h(-8) = |-8+5| \\ &= 3\end{aligned}$$

3. 두 함수 $f(x) = ax+b$, $g(x) = ax+c$에 대하여 $f \circ g = g \circ f$가 성립하기 위한 필요충분조건은 무엇인가?

① $a=1$ 또는 $b=c$
② $a=1$
③ $b=c$
④ $a=0$ 또는 $b=c$
⑤ $a=0$

해설

$$\begin{aligned}(f\circ g)(x) &= f(g(x)) = f(ax+c)\\ &= a(ax+c)+b\\ &= a^2x+ac+b\end{aligned}$$

마찬가지로 $(g\circ f)(x) = a^2x+ab+c$

$\therefore\ ac+b = ab+c$

즉, $(a-1)(b-c) = 0$

$\therefore\ a=1$ 또는 $b=c$

4. 함수 $f(x)$ 가 $f(2x+1) = 3x+2$ 를 만족할 때, $f(3)$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(2x+1) = 3x+2$ 에서 $2x+1 = 3$ 이므로
$x = 1$ 을 대입하면
$f(2 \cdot 1 + 1) = f(3) = 3 \cdot 1 + 2 = 5$

5. 0이 아닌 실수에서 정의되는 두 함수 $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$, $g(x) = 1 - x$ 에 대하여 $h(x) = f(g(x))$ 라고 할 때, $h(x) = \frac{99}{100}$ 를 만족시키는 실수 x 의 값을 구하면?

① 95 ② 97 ③ 99 ④ −97 ⑤ −99

해설

$h(x) = f(g(x)) = f(1-x) = 1 - \frac{1}{1-x}$

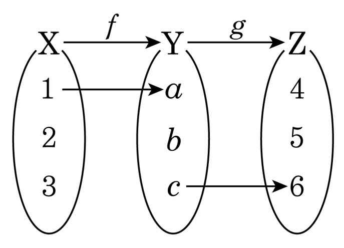
$= \frac{-x}{1-x} = \frac{x}{x-1}$

$h(x) = \frac{99}{100}$ 에서

$\frac{x}{x-1} = \frac{99}{100}$

따라서 $x = -99$

6. 세 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3\}$, $Y = \{a,\ b,\ c\}$, $Z = \{4,\ 5,\ 6\}$에 대하여 일대일 대응인 함수 $f\ :\ X \to Y$와 $g\ :\ Y \to Z$가 $f(1) = a,\ g(c) = 6,\ (g \cdot f)(2) = 4$를 만족할 때, $f(3)$의 값은?



① a　　② b

③ c　　④ b, c 모두 가능하다.

⑤ a, b, c 모두 가능하다.

해설

$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = 4 \cdots$ ㉠

함수 f 와 g 는 일대일 대응이므로 $g(f(2)) = 4$에서 $f(2) = a$ 또는 b

i) $f(2) = a$인 경우

$f(1) = a$로 정의된 조건과 모순

ii) $f(2) = b$인 경우

$f(1) = a,\ f(2) = b$로 성립

$\therefore\ f(2) = b,\ f(3) = c$

7. 두 함수 $f(x) = x + a$, $g(x) = x^2 - 1$ 일 때, 모든 실수 x 에 대하여 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 가 성립하도록 실수 a 의 값을 정하면?

① 0　② -1　③ -2　④ 1　⑤ 4

해설

$g \circ f = f \circ g$ 에서

$(x+a)^2 - 1 = x^2 - 1 + a$,

$x^2 + 2ax + a^2 - 1 = x^2 - 1 + a$

즉 $2ax + a^2 - a = 0$

모든 실수 x 에 대해 성립하려면 $a = 0$

8. $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ 일 때, $g(f(x))=x$가 되는 함수 $g(x)$는?

① $1-x$　② $\dfrac{1}{1-x}$　③ $\dfrac{x}{x-1}$　④ $\dfrac{x-1}{x}$　⑤ $\dfrac{x-1}{x+1}$

해설

$f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ 일 때

$g(f(x))=x$에서 $f(x)=t$로 놓으면

$\dfrac{1}{1-x}=t$ 에서 $(1-x)t=1$, $t-xt=1$

$xt=t-1$, $x=\dfrac{t-1}{t}$ 이므로 $g(t)=\dfrac{t-1}{t}$

$\therefore\ g(x)=\dfrac{x-1}{x}$

9. 두 함수 $f(x)=3x-1,\ g(x)=4-3x$ 에 대하여 $h\circ f=g$ 를 만족하는 일차함수 $h(x)$ 는?

① $h(x)=\frac{1}{3}(x+1)$
② $h(x)=3x-1$
③ $h(x)=x-3$
④ $h(x)=3-x$
⑤ $h(x)=x+3$

해설

$(h\circ f)(x)=4-3x$ 에서
$f(x)=t$ 라 하면 $t=3x-1,\ 3x=t+1$
$x=\frac{1}{3}(t+1)$ 을 대입하면
$h(t)=4-3\times\frac{1}{3}(t+1)=3-t$
$\therefore\ h(x)=3-x$

10. 세 함수 $f,\ g,\ h$ 가 $(g\circ f)(x)=x,\ (h\circ f)(x)=-x+3$ 일 때, $k\circ g=h$ 를 만족시키는 함수 $k(x)$ 를 구하면?

① $k(x)=-x+1$　② $k(x)=-x+2$　③ $k(x)=-x+3$

④ $k(x)=-x+4$　⑤ $k(x)=-x+5$

해설

$k\circ g=h$ 이므로 $(k\circ g)\circ f=h\circ f$

$k\circ(g\circ f)=h\circ f$

$k\circ I=h\circ f(\because g\circ f=I,\ I$는 항등함수$)$

$\therefore k=h\circ f(\because k\circ I=I\circ k=k)$

$\therefore k(x)=(h\circ f)(x)=-x+3$

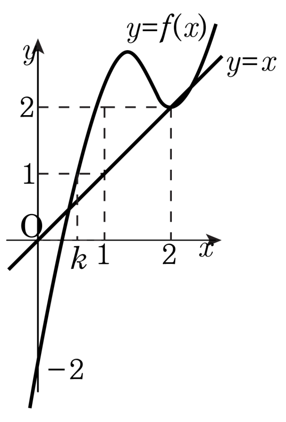
11. $f(x) = x+1$, $g(x) = 3x-2$ 일 때, $(g \circ h)(x) = f(x)$ 를 만족시키는 함수 $h(x)$ 를 구하면?

① $h(x) = \frac{1}{3}x + 1$
② $h(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$
③ $h(x) = x + \frac{1}{3}$
④ $h(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$
⑤ $h(x) = \frac{2}{3}x + 1$

해설

$f(x) = x+1$, $g(x) = 3x-2$ 일 때,
$(g \circ h)(x) = f(x)$ 를 만족해야 하므로
$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = 3h(x) - 2$
$3h(x) - 2 = x + 1$, $3h(x) = x + 3$
$\therefore h(x) = \frac{1}{3}x + 1$

12. 다음 그림과 같이 함수 $f(x)=x^3-5x^2+8x-2$ 에서 $f(k)=1$ 일 때, $f^{10}(k)$ 의 값은?(단, $f^2=f\circ f,\ f^3=f^2\circ f,\ f^n=f^{n-1}\circ f$)



① 1　　② 2　　③ 3　　④ 5　　⑤ 11

해설

$f(k)=1$

$f^2(k)=f(f(k))=f(1)=2$

$f^3(k)=f^2\circ f(k)=f^2(f(k))=f^2(1)$

$\quad\quad=f(f(1))=f(2)=2$

$\vdots$

$f^{10}(k)=2$

13. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=x+2$ 에 대하여 $f^n(x)=\underline{(f\circ f\circ\cdots\circ f)}(x)$($x$은 자연수) 라 할 때, $f^{2007}(1)$ 의 값은?
(단, 밑줄 그은부분의 f 갯수는 n개)

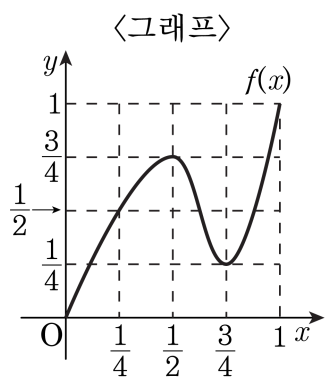
① 2007 ② 2008 ③ 2009 ④ 4015 ⑤ 4016

해설

$f(x)=x+2$
$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))=(x+2)+2=x+4$
$f^3(x)=\left(f\circ f^2\right)(x)=f(f^2(x))=(x+4)+2=x+6$
$f^4(x)=\left(f\circ f^3\right)(x)=f(f^3(x))=(x+6)+2=x+8$
$\vdots$
$f^n(x)=x+2n$
$\therefore f^{2007}(1)=1+2\times 2007=4015$

14. $R=\{x|0\le x\le 1\}$이라 할 때, R에서 R로의 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같다.(단, $f^n(x)=(f\circ f\circ \dots \circ f)(x)$: f 개수 n개)

〈그래프〉



이 때, $f\left(\frac{1}{4}\right)+f^2\left(\frac{1}{4}\right)+f^3\left(\frac{1}{4}\right)+\cdots+f^{99}\left(\frac{1}{4}\right)$ 의 값을 구하면?

(단, $f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2},\ f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4},\ f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{4}$)

① $\frac{99}{2}$　② $\frac{95}{2}$　③ $\frac{93}{2}$　④ $\frac{91}{2}$　⑤ $\frac{89}{2}$

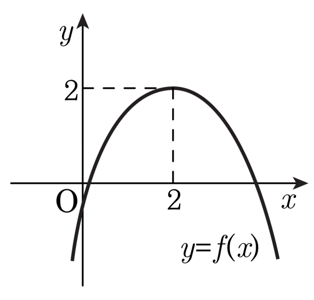
해설

그래프에서 $f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2},\ f^2\left(\frac{1}{4}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4},\ f^3\left(\frac{1}{4}\right)=f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{4},\ \cdots$ 이므로

$f^{3k+1}\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2},\ f^{3k+2}\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4},\ f^{3k+3}\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}\ (k=0,\ 1,\ 2,\cdots)$

$\therefore\ f\left(\frac{1}{4}\right)+f^2\left(\frac{1}{4}\right)+f^3\left(\frac{1}{4}\right)+\cdots+f^{99}\left(\frac{1}{4}\right)=33\times\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)=\frac{99}{2}$

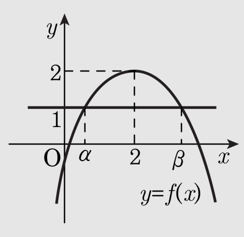
15. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $(f \circ f)(x) = 1$ 의 서로 다른 실근의 개수는?



① 없다　　② 1 개　　③ 2 개　　④ 3 개　　⑤ 4 개

해설

$(f \circ f)(x) = 1$ 을 만족하므로 $f(f(x)) = 1$
$f(x) = t$ 라 놓고 $f(t) = 1$ 을 만족하는 t 의 값을 $\alpha, \beta(\alpha < \beta)$ 라 하면
$0 < \alpha < 2 < \beta$ 이다.
이 때, $f(x) = \alpha$ 를 만족하는 x 의 값은 2 개이지만
$f(x) = \beta$ 를 만족하는 근은 없다.



따라서, $(f \circ f)(x) = 1$ 을 만족하는 x 의 값은 2 개이다.