1. 세 수 $A = \sqrt{6} + \sqrt{7}, B = \sqrt{5} + 2\sqrt{2}, C = \sqrt{3} + \sqrt{10}$ 의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $A < B < C$　　② $A < C < B$　　③ $B < A < C$

④ $C < A < B$　　⑤ $C < B < A$

해설

$A > 0,\ B > 0,\ C > 0$ 이므로
A^2, B^2, C^2 의 대소를 비교한 것과 같다.

$$A^2 = (\sqrt{6} + \sqrt{7})^2 = 13 + 2\sqrt{42}$$
$$B^2 = (\sqrt{5} + 2\sqrt{2})^2 = 13 + 2\sqrt{40}$$
$$C^2 = (\sqrt{3} + \sqrt{10})^2 = 13 + 2\sqrt{30}$$

이므로 $A^2 > B^2 > C^2$ 이다.
따라서 $A > B > C$

2. 다음 부등식 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

㉠ $3^{40} > 2^{60}$	㉡ $3^{200} > 6^{150}$
㉢ $5^{10} < 2^{30} < 3^{20}$	

① ㉠　② ㉡　③ ㉠, ㉡
④ ㉠, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $\dfrac{3^{40}}{2^{60}} = \dfrac{(3^2)^{20}}{(2^3)^{20}} = \left(\dfrac{9}{8}\right)^{20} > 1$

$\therefore\ 3^{40} > 2^{60}$

㉡ $\dfrac{3^{200}}{6^{150}} = \dfrac{(3^4)^{50}}{(6^3)^{50}} = \dfrac{(3^4)^{50}}{(2^3 \cdot 3^3)^{50}} = \left(\dfrac{3}{8}\right)^{50} < 1$

$\therefore\ 3^{200} < 6^{150}$

㉢ $\dfrac{5^{10}}{2^{30}} = \dfrac{5^{10}}{(2^3)^{10}} = \left(\dfrac{5}{8}\right)^{10} < 1 \quad \therefore\ 5^{10} < 2^{30}$

$\dfrac{2^{30}}{3^{20}} = \dfrac{(2^3)^{10}}{(3^2)^{10}} = \left(\dfrac{8}{9}\right)^{10} < 1 \quad \therefore\ 2^{30} < 3^{20}$

$\therefore\ 5^{10} < 2^{30} < 3^{20}$

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉢ 이다.

3. 실수 a, b 에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

㉠ $\lvert a\rvert^2 = a^2$	㉡ $\lvert ab\rvert \ge ab$
㉢ $\lvert a\rvert + \lvert b\rvert \ge \lvert a-b\rvert$	㉣ $\lvert a\rvert - \lvert b\rvert \ge \lvert a-b\rvert$

① ㉠, ㉡　　② ㉡, ㉢　　③ ㉠, ㉡, ㉢
④ ㉠, ㉢, ㉣　　⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉣ $(\lvert a\rvert - \lvert b\rvert)^2 - \lvert a-b\rvert^2$
$= \lvert a\rvert^2 - 2\lvert a\rvert\lvert b\rvert + \lvert b\rvert^2 - (a-b)^2$
$= 2(ab - \lvert ab\rvert) \le 0$

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉡, ㉢ 이다.

4. 임의의 실수 a, b, c 에 대하여 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $|a| = -a$

② $a > b > 0$ 일 때, $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 이다.

③ $|a| \geq 0$, $|a| \geq a$, $|a| = |-a|$ 이다.

④ $|a+b+c| \leq |a|+|b|+|c|$

⑤ $|a-b| \geq |a|-|b|$

해설

① $|a| = a(a \geq 0)$
$-a(a < 0)$

② 참

③ 참

④ $(|a+b+c|)^2$
$= a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$
$(|a|+|b|+|c|)^2$
$= a^2+b^2+c^2+2(|a||b|+|b||c|+|c||a|)$
$|a||b| \geq ab,\ |b||c| \geq bc,\ |c||a| \geq ca$
$\therefore |a+b+c| \leq |a|+|b|+|c|$

⑤ $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$
$(|a|-|b|)^2 = a^2-2|a||b|+b^2\ (\because |a||b| \geq ab)$
$\therefore |a-b| \geq |a|-|b|$

5. $a > 1$일 때 $b = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$, $c = \frac{1}{2}\left(b + \frac{1}{b}\right)$이라 한다. a, b, c의 대소 관계로 옳은 것은?

① $a > b > c$ ② $a > c > b$ ③ $b > c > a$
④ $b > a > c$ ⑤ $c > b > a$

해설

$b - a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) - a = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} - a\right)$

그런데, $a > 1$이므로 $\frac{1}{a} - a < 0 \quad \therefore\ b < a$

또, $b = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) > \sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 1 \ \left(\because\ a \neq \frac{1}{a}\right)$

$c - b = \frac{1}{2}\left(b + \frac{1}{b}\right) - b = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b} - b\right) < 0$

$\therefore\ c < b$

$\therefore\ a > b > c$