1. $x > 0$, $y > 0$ 일 때 두 식 $\sqrt{x} + \sqrt{y}$, $\sqrt{2(x+y)}$ 를 바르게 비교한 것은?

① $\sqrt{x} + \sqrt{y} < \sqrt{2(x+y)}$ ② $\sqrt{x} + \sqrt{y} \le \sqrt{2(x+y)}$

③ $\sqrt{x} + \sqrt{y} > \sqrt{2(x+y)}$ ④ $\sqrt{x} + \sqrt{y} \ge \sqrt{2(x+y)}$

⑤ $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2(x+y)}$

해설

$\sqrt{x} + \sqrt{y} > 0$, $\sqrt{2(x+y)} > 0$

이 때 $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 - \left\{\sqrt{2(x+y)}\right\}^2$

$= (x + y + 2\sqrt{xy}) - (2x - 2y)$

$= -(x - 2\sqrt{xy} + y)$

$= -(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \le 0$

이므로 $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 \le \left\{\sqrt{2(x+y)}\right\}^2$

$\therefore (\sqrt{x} + \sqrt{y}) \le \sqrt{2(x+y)}$

(단, 등호는 $\sqrt{x} = \sqrt{y}$, 즉 $x = y$일때성립)

2. 다음 두 식의 대소를 바르게 비교한 것은?

$A = 3x^2 - xy + 2y^2$
$B = 2x^2 + 3xy - 3y^2$

① $A < B$ ② $A \leq B$ ③ $A > B$
④ $A \geq B$ ⑤ $A = B$

해설

$$\begin{aligned} A - B &= 3x^2 - xy + 2y^2 - (2x^2 + 3xy - 3y^2) \\ &= x^2 - 4xy + 5y^2 \\ &= x^2 - 4xy + 4y^2 + y^2 \\ &= (x - 2y)^2 + y^2 \geq 0 \end{aligned}$$

따라서 $A - B \geq 0$이므로 $A \geq B$

3. n이 자연수 일 때, 2^{10n}, 1000^n 의 대소를 비교하면?

① $2^{10n} < 1000^n$ ② $2^{10n} \leq 1000^n$ ③ $2^{10n} > 1000^n$
④ $2^{10n} \geq 1000^n$ ⑤ $2^{10n} = 1000^n$

해설

$2^{10n} > 0,\ 1000^n > 0$ 이고, n이 자연수이므로

$$\frac{2^{10n}}{1000^n} = \frac{(2^{10})^n}{1000^n} = \left(\frac{2^{10}}{1000}\right)^n = \left(\frac{1024}{1000}\right)^n > 1$$

$\therefore 2^{10n} > 1000^n$

4. 다음은 $a > 0,\ b > 0$ 일 때, $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$ 임을 증명하는 과정이다. 빈 칸 (가), (나), (다)에 들어갈 식 또는 기호가 순서대로 바르게 나열된 것을 고르면?

> $a > 0,\ b > 0$ 일 때, $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$
> (증명)
> $\boxed{(가)} - \boxed{(나)}$
> $= (a + 2\sqrt{ab} + b) - (a + b) = 2\sqrt{ab} > 0$
> $\therefore\ (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 > (\sqrt{a+b})^2$
> 그런데, $\sqrt{a} + \sqrt{b}\ \boxed{(다)}\ 0$,
> $\sqrt{a+b}\ \boxed{(다)}\ 0$ 이므로 $\therefore\ \sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$

① $\sqrt{a} + \sqrt{b},\ \sqrt{a+b},\ <$

② $\sqrt{a} + \sqrt{b},\ \sqrt{a+b},\ >$

③ $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2,\ (\sqrt{a+b})^2,\ <$

④ $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2,\ (\sqrt{a+b})^2,\ >$

⑤ $(\sqrt{a+b})^2,\ (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2,\ >$

해설

양 변을 제곱하여 $a - b > 0$ 이면 $a > b$ 임을 이용한다.

5. 두 수 $2^{30}, 3^{30}$ 의 대소를 바르게 비교한 것은?

① $2^{30} > 3^{20}$ ② $2^{30} \le 3^{20}$ ③ $2^{60} > 3^{20}$
④ $2^{60} \ge 3^{20}$ ⑤ $2^{30} < 3^{20}$

해설

$\frac{2^{30}}{3^{20}} = \frac{(2^3)^{10}}{(3^2)^{10}} = \left(\frac{8}{9}\right)^{10} < 1$

$\therefore 2^{30} < 3^{20}$

6. 부등식 $3^{400} > 4^{100n}$ 을 만족시키는 자연수 n 의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$$\frac{3^{400}}{4^{100n}} = \frac{(3^4)^{100}}{(4^n)^{100}} = \left(\frac{81}{4^n}\right)^{100} > 1$$

$3^{400} > 4^{100n}$ 이므로 $\dfrac{81}{4^n} > 1$

$\therefore\ n = 1,\ 2,\ 3$

따라서 자연수 n 의 개수는 3 개이다.

7. 실수 x, y에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

㉠ $\lvert x\rvert + \lvert y\rvert \geq \lvert x+y\rvert$	㉡ $\lvert x+y\rvert \geq \lvert x-y\rvert$
㉢ $\lvert x-y\rvert \geq \lvert x\rvert - \lvert y\rvert$	

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡ ④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠ $(\lvert x\rvert + \lvert y\rvert)^2 - \lvert x+y\rvert^2 = 2(\lvert xy\rvert - xy) \geq 0$

$\therefore\ \lvert x\rvert + \lvert y\rvert \geq \lvert x+y\rvert$

㉡ (반례) $x = 1, y = -1$ 일 때

$\lvert 1+(-1)\rvert = 0,\ \ \lvert 1-(-1)\rvert = 2$ 이므로

$\lvert x+y\rvert < \lvert x-y\rvert$

㉢ $\lvert x-y\rvert^2 - (\lvert x\rvert - \lvert y\rvert)^2 = 2(\lvert xy\rvert - xy) \geq 0$

$\therefore\ \lvert x-y\rvert \geq \lvert x\rvert - \lvert y\rvert$

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉢ 이다.

8. 다음은 임의의 실수 x, y 에 대하여 $|x| + |y| \geq |x - y|$ 가 성립함을 증명하는 과정이다. 과정에서 ㉠ 에 알맞은 것은?

증명

$(|x| + |y|)^2 - |x - y|^2$
$= |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 - (x - y)^2$
$= 2(|xy| + xy) \geq 0$
$\therefore (|x| + |y|)^2 \geq |x - y|^2$
그런데 $|x| + |y| \geq 0$, $|x - y| \geq 0$ 이므로
$|x| + |y| \geq |x - y|$ (단, 등호는 (㉠) 일 때, 성립)

① $xy > 0$ ② $xy < 0$ ③ $xy \geq 0$
④ $xy \leq 0$ ⑤ $xy = 0$

해설

주어진 부등식에서
등호는 $|xy| + xy = 0$ 일 때, 성립한다.
$|xy| \geq 0$이므로
$|xy| + xy = 0$ 이려면 $xy \leq 0$
따라서 ㉠ 에 알맞은 것은 ④이다.

9. 다음 부등식에 관한 설명 중에서 옳은 것은? (단, a, b, x, y는 실수임)

① $a \geq b \Leftrightarrow a - b \leq 0$

② $a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2$

③ $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$(단, $ax = by$일 때, 등호성립)

④ $a^2 + b^2 \geq ab$(단, $a = b$일 때, 등호 성립)

⑤ 두 양수 a, b에 대하여 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$(단, $a = b$일 때, 등호 성립)

해설

②의 반례 : a, b가 음수인 경우

③ $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - (ax + by)^2$

$= (a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2)$

$-(a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2)$

$= a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2$

$= (ay - bx)^2 \geq 0$단, 등호는 $ay = bx$일때 성립

④ $a^2 + b^2 - ab$

$= \left(a - \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0$

등호는 $a = b = 0$일때 성립

⑤ $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$

($\because$산술평균 $\geq$기하평균 $\geq$조화평균)

10. 다음은 실수 x, y, z 에 대하여 $x^2+y^2+z^2$ 와 $xy+yz+zx$ 의 대소를 비교한 것이다. [가], [나] 에 알맞은 내용을 차례로 나열한 것은?

$x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)$
$=\frac{1}{2}\{2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx\}$
$=\frac{1}{2}(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}$ ([가])0 이므로
$x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$ (단, 등호는 ([나]) 일 때 성립)

① $<, x=y=z$
② $\leq, x=y=z$
③ $\geq, x=y=z$
④ $<, xy=yz=zx$
⑤ $\leq, xy=yz=zx$

해설

$x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)$

$=\frac{1}{2}\{2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx\}$

$=\frac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\} \geq 0$ 이므로

$x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$ (단, 등호는 $x=y=z$ 일 때 성립)

11. 양수 a, b가 $a+b=1$을 만족시킬 때, 두 수 $P=a^3+b^3$, $Q=a^2+b^2$의 대소로 비교로 바른 것은?

① $P>Q$　② $P \geq Q$　③ $P=Q$
④ $P<Q$　⑤ $P \leq Q$

해설

a, b는 양수이고 $a+b=1$이므로
$0<a<1$, $0<b<1$
또 $b=1-a$이므로
$$P=a^3+b^3=a^3+(1-a)^3$$
$$=a^3+1-3a+3a^2-a^3$$
$$=3a^2-3a+1$$
$$Q=a^2+b^2=a^2+(1-a)^2$$
$$=a^2+a^2-2a+1$$
$$=2a^2-2a+1$$
$$P-Q=3a^2-3a+1-2a^2+2a-1$$
$$=a^2-a=a(a-1)$$
그런데 $0<a<1$이므로 $a(a-1)<0$
$\therefore P-Q<0$이고 $P<Q$

12. $0 < a < b,\ a+b=1$일 때, 다음 네 수 또는 식의 대소를 비교한 것 중 잘못된 것은?

$1,\quad \sqrt{a}+\sqrt{b},\quad \sqrt{b}-\sqrt{a},\quad \sqrt{b-a}$

① $\sqrt{b}-\sqrt{a} < \sqrt{b-a}$　　② $\sqrt{b}-\sqrt{a} < \sqrt{a}+\sqrt{b}$

③ $\sqrt{a}+\sqrt{b} < 1$　　④ $\sqrt{b-a} < 1$

⑤ $\sqrt{b-a} < \sqrt{a}+\sqrt{b}$

해설

주어진 네 수는 모두 양수이므로 제곱의 대소 관계를 알아보자.

(i) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-1^2 = a+2\sqrt{ab}+b-1$
$= 2\sqrt{ab} > 0$

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 > 1$

$\therefore\ \sqrt{a}+\sqrt{b} > 1$

(ii) $1^2-(\sqrt{b-a})^2 = 1-b+a$
$= (a+b)-b+a$
$= 2a > 0$

$\therefore\ 1 > \sqrt{b-a}$

(iii) $(\sqrt{b-a})^2-(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2$
$= b-a-(b-2\sqrt{ab}+a)$
$= 2\sqrt{ab}-2a$
$= 2\sqrt{a}(\sqrt{b}-\sqrt{a}) > 0$

$\therefore\ \sqrt{b-a} > \sqrt{b}-\sqrt{a}$

(i), (ii), (iii) 에서 $\sqrt{a}+\sqrt{b} > 1 > \sqrt{b-a} > \sqrt{b}-\sqrt{a}$

13. x, y 가 실수일 때, 다음 중 절대부등식이 아닌 것을 모두 고른 것은?

㉠ $x+1>0$	㉡ $x^2+xy+y^2 \geq 0$
㉢ $|x|+|y| \geq |x-y|$	㉣ $|x+y| \geq |x-y|$

① ㉠　② ㉠, ㉢　③ ㉠, ㉣
④ ㉡, ㉣　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $x>-1$ 일 때만 성립한다.

㉡ $x^2+xy+y^2=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2 \geq 0$
(단, 등호는 $x=y=0$ 일 때 성립)

㉢ $(|x|+|y|)^2-|x-y|^2$
$=|x|^2+2|x||y|+|y|^2-(x-y)^2$
$=2(|xy|+xy) \geq 0$
$\therefore (|x|+|y|)^2 \geq |x-y|^2$
(단, 등호는 $xy \leq 0$ 일 때 성립)

㉣ (반례) $x=2, y=-3$ 일 때
$|2+(-3)|=1, |2-(-3)|=5$ 이므로
$|x+y|<|x-y|$

따라서 절대부등식이 아닌 것은 ㉠, ㉣ 이다.

14. 어느 학생이 x, y, z의 평균 A를 구하기 위하여 x, y의 평균 C를 먼저 구하고, C와 z의 평균 B를 구하였다. 다음 중 옳은 것은? (단, $x < y < z$)

① $B = A$ ② $B < A$ ③ $B > A$

④ $B \leq A$ ⑤ $B \geq A$

해설

$A = \dfrac{x+y+z}{3}$, $C = \dfrac{x+y}{2}$

$B = \dfrac{\dfrac{x+y}{2}+z}{2} = \dfrac{x+y+2z}{4}$,

$B - A = \dfrac{2z-x-y}{12} = \dfrac{(z-x)+(z-y)}{12} > 0$

$\therefore\ B > A$

15. 모든 실수 x, y 에 대하여 $(x+y)^2 \le k(x^2+y^2-xy)$가 성립하기 위한 실수 k 의 최솟값은?

① $\frac{5}{2}$ ② 4 ③ $2\sqrt{2}$ ④ $3\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

해설

i) $y=0$ 일 때 준식은 $x^2 \le kx^2$

$\therefore k \ge 1 \cdots$ ㉠

ii) $y \ne 0$ 일 때 양변을 y^2 으로 나누면 준식은

$$\left(\frac{x}{y}+1\right)^2 \le k\left\{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1-\frac{x}{y}\right\}$$

여기서 $\frac{x}{y}$ 를 t로 치환하면

$t^2+2t+1 \le k(t^2+1-t)$

$\therefore (k-1)t^2-(k+2)t+(k-1) \ge 0 \cdots$ ㉡

㉡ 식이 모든 실수 t에 대하여 성립하려면

$k \ne 1$ 일 때 : $k-1>0$

$D=(k+2)^2-4(k-1)^2=-3k(k-4) \le 0$

$\therefore k \ge 4 \cdots$ ㉢

$k=1$ 일 때 : $-3t \ge 0$ 은 모든 실수 t에 대하여 성립할 수 없다.

$\therefore$ ㉠, ㉢에서 구하는 k 의 범위는 $k \ge 4$