1. $x>0,\ y>0$ 일 때 두 식 $\sqrt{x}+\sqrt{y}$, $\sqrt{2(x+y)}$ 를 바르게 비교한 것은?

① $\sqrt{x}+\sqrt{y}<\sqrt{2(x+y)}$

② $\sqrt{x}+\sqrt{y}\le\sqrt{2(x+y)}$

③ $\sqrt{x}+\sqrt{y}>\sqrt{2(x+y)}$

④ $\sqrt{x}+\sqrt{y}\ge\sqrt{2(x+y)}$

⑤ $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2(x+y)}$

해설

$\sqrt{x}+\sqrt{y}>0,\ \sqrt{2(x+y)}>0$

이 때 $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2-\left\{\sqrt{2(x+y)}\right\}^2$

$=(x+y+2\sqrt{xy})-(2x-2y)$

$=-(x-2\sqrt{xy}+y)$

$=-(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\le 0$

이므로 $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2\le\left\{\sqrt{2(x+y)}\right\}^2$

$\therefore(\sqrt{x}+\sqrt{y})\le\sqrt{2(x+y)}$

(단, 등호는 $\sqrt{x}=\sqrt{y}$, 즉 $x=y$일때성립)

2. 다음 두 식의 대소를 바르게 비교한 것은?

$$A = 3x^2 - xy + 2y^2$$
$$B = 2x^2 + 3xy - 3y^2$$

① $A < B$ ② $A \leq B$ ③ $A > B$

④ $A \geq B$ ⑤ $A = B$

해설

$$\begin{aligned} A - B &= 3x^2 - xy + 2y^2 - (2x^2 + 3xy - 3y^2) \\ &= x^2 - 4xy + 5y^2 \\ &= x^2 - 4xy + 4y^2 + y^2 \\ &= (x - 2y)^2 + y^2 \geq 0 \end{aligned}$$

따라서 $A - B \geq 0$이므로 $A \geq B$

3. n이 자연수 일 때, $2^{10n}, 1000^n$ 의 대소를 비교하면?

① $2^{10n} < 1000^n$ ② $2^{10n} \leq 1000^n$ ③ $2^{10n} > 1000^n$

④ $2^{10n} \geq 1000^n$ ⑤ $2^{10n} = 1000^n$

해설

$2^{10n} > 0,\ 1000^n > 0$이고, n이 자연수이므로

$$\frac{2^{10n}}{1000^n} = \frac{(2^{10})^n}{1000^n} = \left(\frac{2^{10}}{1000}\right)^n = \left(\frac{1024}{1000}\right)^n > 1$$

$\therefore 2^{10n} > 1000^n$

4. 다음은 $a > 0,\ b > 0$ 일 때, $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$ 임을 증명하는 과정이다. 빈 칸 (가), (나), (다)에 들어갈 식 또는 기호가 순서대로 바르게 나열된 것을 고르면?

$a > 0,\ b > 0$ 일 때, $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$
(증명)
$\boxed{(가)} - \boxed{(나)}$
$= (a + 2\sqrt{ab} + b) - (a + b) = 2\sqrt{ab} > 0$
$\therefore\ (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 > (\sqrt{a+b})^2$
그런데, $\sqrt{a} + \sqrt{b}\ \boxed{(다)}\ 0$,
$\sqrt{a+b}\ \boxed{(다)}\ 0$ 이므로 $\therefore\ \sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$

① $\sqrt{a} + \sqrt{b},\ \sqrt{a+b},\ <$

② $\sqrt{a} + \sqrt{b},\ \sqrt{a+b},\ >$

③ $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2,\ (\sqrt{a+b})^2,\ <$

④ $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2,\ (\sqrt{a+b})^2,\ >$

⑤ $(\sqrt{a+b})^2,\ (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2,\ >$

해설

양 변을 제곱하여 $a - b > 0$ 이면 $a > b$ 임을 이용한다.

5. 두 수 $2^{30}, 3^{30}$ 의 대소를 바르게 비교한 것은?

① $2^{30} > 3^{20}$ ② $2^{30} \leq 3^{20}$ ③ $2^{60} > 3^{20}$

④ $2^{60} \geq 3^{20}$ ⑤ $2^{30} < 3^{20}$

해설

$$\frac{2^{30}}{3^{20}} = \frac{(2^3)^{10}}{(3^2)^{10}} = \left(\frac{8}{9}\right)^{10} < 1$$

$\therefore 2^{30} < 3^{20}$

6. 부등식 $3^{400} > 4^{100n}$을 만족시키는 자연수 n의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$$\frac{3^{400}}{4^{100n}} = \frac{(3^4)^{100}}{(4^n)^{100}} = \left(\frac{81}{4^n}\right)^{100} > 1$$

$3^{400} > 4^{100n}$ 이므로 $\dfrac{81}{4^n} > 1$

$\therefore\ n = 1,\ 2,\ 3$

따라서 자연수 n의 개수는 3 개이다.

7. 실수 x, y에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

㉠ $\lvert x\rvert + \lvert y\rvert \ge \lvert x+y\rvert$	㉡ $\lvert x+y\rvert \ge \lvert x-y\rvert$
㉢ $\lvert x-y\rvert \ge \lvert x\rvert - \lvert y\rvert$	

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡ ④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠ $(\lvert x\rvert + \lvert y\rvert)^2 - \lvert x+y\rvert^2 = 2(\lvert xy\rvert - xy) \ge 0$

$\therefore\ \lvert x\rvert + \lvert y\rvert \ge \lvert x+y\rvert$

㉡ (반례) $x = 1, y = -1$ 일 때

$\lvert 1+(-1)\rvert = 0,\quad \lvert 1-(-1)\rvert = 2$ 이므로

$\lvert x+y\rvert < \lvert x-y\rvert$

㉢ $\lvert x-y\rvert^2 - (\lvert x\rvert - \lvert y\rvert)^2 = 2(\lvert xy\rvert - xy) \ge 0$

$\therefore\ \lvert x-y\rvert \ge \lvert x\rvert - \lvert y\rvert$

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉢ 이다.

8. 다음은 임의의 실수 x, y 에 대하여 $|x|+|y| \geq |x-y|$ 가 성립함을 증명하는 과정이다. 과정에서 ㉠ 에 알맞은 것은?

증명

$(|x|+|y|)^2 - |x-y|^2$

$= |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 - (x-y)^2$

$= 2(|xy| + xy) \geq 0$

$\therefore (|x|+|y|)^2 \geq |x-y|^2$

그런데 $|x|+|y| \geq 0$, $|x-y| \geq 0$ 이므로

$|x|+|y| \geq |x-y|$ (단, 등호는 (㉠) 일 때, 성립)

① $xy > 0$ ② $xy < 0$ ③ $xy \geq 0$

④ $xy \leq 0$ ⑤ $xy = 0$

해설

주어진 부등식에서

등호는 $|xy| + xy = 0$ 일 때, 성립한다.

$|xy| \geq 0$ 이므로

$|xy| + xy = 0$ 이려면 $xy \leq 0$

따라서 ㉠ 에 알맞은 것은 ④이다.

9. 다음 부등식에 관한 설명 중에서 옳은 것은? (단, a, b, x, y는 실수임)

① $a \geq b \Leftrightarrow a - b \leq 0$

② $a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2$

③ $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$(단, $ax = by$일 때, 등호성립)

④ $a^2 + b^2 \geq ab$(단, $a = b$일 때, 등호 성립)

⑤ 두 양수 a, b에 대하여 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$(단, $a = b$일 때, 등호 성립)

해설

②의 반례 : a, b가 음수인 경우

③ $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - (ax + by)^2$

$= (a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2)$

$-(a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2)$

$= a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2$

$= (ay - bx)^2 \geq 0$단, 등호는 $ay = bx$일때 성립

④ $a^2 + b^2 - ab$

$= \left(a - \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0$

등호는 $a = b = 0$일때 성립

⑤ $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$

($\because$산술평균 $\geq$기하평균 $\geq$조화평균)

10. 다음은 실수 $x,\ y,\ z$ 에 대하여 $x^2+y^2+z^2$ 와 $xy+yz+zx$ 의 대소를 비교한 것이다. [가], [나]에 알맞은 내용을 차례로 나열한 것은?

$x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)$ $=\dfrac{1}{2}\{2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx\}$ $=\dfrac{1}{2}(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}$ ([가])0 이므로 $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$ (단, 등호는 ([나])일 때 성립)

① $<, x=y=z$

② $\leq, x=y=z$

③ $\geq, x=y=z$

④ $<, xy=yz=zx$

⑤ $\leq, xy=yz\geq zx$

해설

$x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)$

$=\dfrac{1}{2}\{2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx\}$

$=\dfrac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}\geq 0$ 이므로

$x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$ (단, 등호는 $x=y=z$ 일 때 성립)

11. 양수 a, b가 $a+b=1$을 만족시킬 때, 두 수 $P=a^3+b^3$, $Q=a^2+b^2$의 대소로 비교로 바른 것은?

① $P>Q$ ② $P\geq Q$ ③ $P=Q$

④ $P<Q$ ⑤ $P\leq Q$

해설

a, b는 양수이고 $a+b=1$이므로

$0<a<1$, $0<b<1$

또 $b=1-a$이므로

$$\begin{aligned} P &= a^3+b^3 = a^3+(1-a)^3 \\ &= a^3+1-3a+3a^2-a^3 \\ &= 3a^2-3a+1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q &= a^2+b^2 = a^2+(1-a)^2 \\ &= a^2+a^2-2a+1 \\ &= 2a^2-2a+1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P-Q &= 3a^2-3a+1-2a^2+2a-1 \\ &= a^2-a = a(a-1) \end{aligned}$$

그런데 $0<a<1$이므로 $a(a-1)<0$

$\therefore P-Q<0$이고 $P<Q$

12. $0 < a < b$, $a + b = 1$일 때, 다음 네 수 또는 식의 대소를 비교한 것 중 잘못된 것은?

$1,\quad \sqrt{a}+\sqrt{b},\quad \sqrt{b}-\sqrt{a},\quad \sqrt{b-a}$

① $\sqrt{b}-\sqrt{a} < \sqrt{b-a}$

② $\sqrt{b}-\sqrt{a} < \sqrt{a}+\sqrt{b}$

③ $\sqrt{a}+\sqrt{b} < 1$

④ $\sqrt{b-a} < 1$

⑤ $\sqrt{b-a} < \sqrt{a}+\sqrt{b}$

해설

주어진 네 수는 모두 양수이므로 제곱의 대소 관계를 알아보자.

(i) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 - 1^2 = a + 2\sqrt{ab} + b - 1$

$= 2\sqrt{ab} > 0$

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 > 1$

$\therefore \sqrt{a}+\sqrt{b} > 1$

(ii) $1^2 - (\sqrt{b-a})^2 = 1 - b + a$

$= (a+b) - b + a$

$= 2a > 0$

$\therefore 1 > \sqrt{b-a}$

(iii) $(\sqrt{b-a})^2 - (\sqrt{b}-\sqrt{a})^2$

$= b - a - (b - 2\sqrt{ab} + a)$

$= 2\sqrt{ab} - 2a$

$= 2\sqrt{a}(\sqrt{b}-\sqrt{a}) > 0$

$\therefore \sqrt{b-a} > \sqrt{b}-\sqrt{a}$

(i), (ii), (iii)에서 $\sqrt{a}+\sqrt{b} > 1 > \sqrt{b-a} > \sqrt{b}-\sqrt{a}$

13. x, y 가 실수일 때, 다음 중 절대부등식이 아닌 것을 모두 고른 것은?

㉠ $x+1>0$	㉡ $x^2+xy+y^2 \geq 0$
㉢ $\lvert x\rvert+\lvert y\rvert \geq \lvert x-y\rvert$	㉣ $\lvert x+y\rvert \geq \lvert x-y\rvert$

① ㉠　② ㉠, ㉢　③ ㉠, ㉣　④ ㉡, ㉣　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $x>-1$ 일 때만 성립한다.

㉡ $x^2+xy+y^2=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2 \geq 0$

(단, 등호는 $x=y=0$ 일 때 성립)

㉢ $(\lvert x\rvert+\lvert y\rvert)^2-\lvert x-y\rvert^2$

$=\lvert x\rvert^2+2\lvert x\rvert\lvert y\rvert+\lvert y\rvert^2-(x-y)^2$

$=2(\lvert xy\rvert+xy) \geq 0$

$\therefore (\lvert x\rvert+\lvert y\rvert)^2 \geq \lvert x-y\rvert^2$

(단, 등호는 $xy \leq 0$ 일 때 성립)

㉣ (반례) $x=2, y=-3$ 일 때

$\lvert 2+(-3)\rvert=1, \lvert 2-(-3)\rvert=5$ 이므로

$\lvert x+y\rvert < \lvert x-y\rvert$

따라서 절대부등식이 아닌 것은 ㉠, ㉣ 이다.

14. 어느 학생이 x, y, z의 평균 A를 구하기 위하여 x, y의 평균 C를 먼저 구하고, C와 z의 평균 B를 구하였다. 다음 중 옳은 것은?
(단, $x < y < z$)

① $B = A$　② $B < A$　③ $B > A$

④ $B \leq A$　⑤ $B \geq A$

해설

$$A = \frac{x+y+z}{3},\ C = \frac{x+y}{2}$$

$$B = \frac{\frac{x+y}{2}+z}{2} = \frac{x+y+2z}{4},$$

$$B - A = \frac{2z-x-y}{12} = \frac{(z-x)+(z-y)}{12} > 0$$

$\therefore\quad B > A$

15. 모든 실수 x, y 에 대하여 $(x+y)^2 \le k(x^2+y^2-xy)$ 가 성립하기 위한 실수 k 의 최솟값은?

① $\frac{5}{2}$ ② 4 ③ $2\sqrt{2}$ ④ $3\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

해설

ⅰ) $y=0$ 일 때 준식은 $x^2 \le kx^2$

$\therefore k \ge 1 \cdots$ ㉠

ⅱ) $y \ne 0$ 일 때 양변을 y^2 으로 나누면 준식은

$$\left(\frac{x}{y}+1\right)^2 \le k\left\{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1-\frac{x}{y}\right\}$$

여기서 $\frac{x}{y}$ 를 t 로 치환하면

$t^2+2t+1 \le k(t^2+1-t)$

$\therefore (k-1)t^2-(k+2)t+(k-1) \ge 0 \cdots$ ㉡

㉡ 식이 모든 실수 t 에 대하여 성립하려면

$k \ne 1$ 일 때 : $k-1>0$

$D=(k+2)^2-4(k-1)^2=-3k(k-4) \le 0$

$\therefore k \ge 4 \cdots$ ㉢

$k=1$ 일 때 : $-3t \ge 0$ 은 모든 실수 t 에 대하여 성립할 수 없다.

$\therefore$ ㉠, ㉢에서 구하는 k 의 범위는 $k \ge 4$