1. 다음 중 집합이 될 수 없는 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $\{x|x$는 10보다 큰 수$\}$

② 과일의 모임

③ 몸무게가 40kg 이상인 사람들의 모임

④ 9 와 비슷한 숫자들의 모임

⑤ 기분 좋은 날짜들의 모임

해설

'비슷한', '기분 좋은' 은 정확인 기준이 될 수 없다. 그러므로 집합이 될 수 없다.

2. 집합 $A=\{x,\ y\}$ 의 부분집합의 개수는?

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

$A=\{x,\ y\}$ 이므로 A 의 부분집합의 개수는 원소의 개수만큼 2를 곱한 값과 같다.
따라서 $2^2=2\times2=4$ (개) 이다.

3. 두 집합 $A=\left\{x|x\text{는 } 24\text{의 약수}\right\}$, $B=\left\{x|x\text{는 } 28\text{의 약수}\right\}$ 에 대하여 $n(A\cap B)$ 를 구하여라.

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$A=\{1,2,3,4,6,8,12,24\}$
$B=\{1,2,4,7,14,28\}$
$A\cap B=\{1,2,4\}$
$n(A\cap B)=3$

4. $x>0,\ y>0$ 일 때 두 식 $\sqrt{x}+\sqrt{y},\ \sqrt{2(x+y)}$ 를 바르게 비교한 것은?

① $\sqrt{x}+\sqrt{y}<\sqrt{2(x+y)}$ ② $\sqrt{x}+\sqrt{y}\le\sqrt{2(x+y)}$

③ $\sqrt{x}+\sqrt{y}>\sqrt{2(x+y)}$ ④ $\sqrt{x}+\sqrt{y}\ge\sqrt{2(x+y)}$

⑤ $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2(x+y)}$

해설

$\sqrt{x}+\sqrt{y}>0,\ \sqrt{2(x+y)}>0$

이 때 $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2-\left\{\sqrt{2(x+y)}\right\}^2$

$=(x+y+2\sqrt{xy})-(2x-2y)$

$=-(x-2\sqrt{xy}+y)$

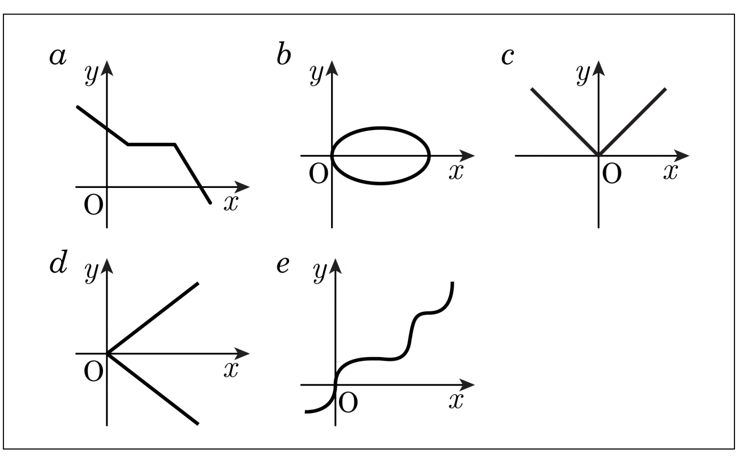
$=-(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\le 0$

이므로 $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2\le\left\{\sqrt{2(x+y)}\right\}^2$

$\therefore(\sqrt{x}+\sqrt{y})\le\sqrt{2(x+y)}$

(단, 등호는 $\sqrt{x}=\sqrt{y}$, 즉 $x=y$일때성립)

5. 다음 그래프 중 함수인 것은?



① a, b, c ② a, c, e ③ a, c, d ④ b, c, e ⑤ c, d, e

해설

[a] 함수 [b] 함수가 아니다. [c] 함수 [d] 함수가 아니다. [e] 함수
따라서 [a], [c], [e] 만이 함수이다.

6. 두 집합 $A = \{a-1,\ 6, 7\}$, $B = \{a,\ 4, 6\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{4, 6\}$ 일 때, a 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$4 \in A$ 이므로 $a - 1 = 4$

$\therefore a = 5$

7. 전체집합 U의 세 부분집합 $A,\ B,\ C$에 대하여 다음 중 $(A-B)-C$와 같은 것은?

① $A-(B-C)$ ② $A-(B\cap C)$ ③ $A-(B\cup C)$

④ $A^c\cap B\cap C^c$ ⑤ $A\cap(B^c\cup C^c)$

해설

$A-B=A\cap B^c$ 이므로

$(A-B)-C=(A\cap B^c)-C$

$=(A\cap B^c)\cap C^c$

$=A\cap(B^c\cap C^c)$ ($\because$ 결합법칙)

$=(A\cap(B\cup C)^c$ ($\because$ 드 모르간의 법칙)

$=A-(B\cup C)$ ($\because$ 차집합의 정의)

8. 자연수 n 에 대하여 2^{4n}, 3^{3n} 의 대소를 바르게 비교한 것은?

① $2^{4n} < 3^{3n}$ ② $2^{4n} > 3^{3n}$ ③ $2^{4n} \leq 3^{3n}$
④ $2^{4n} \geq 3^{3n}$ ⑤ $2^{4n} = 3^{3n}$

해설

$$\frac{2^{4n}}{3^{3n}} = \left(\frac{2^4}{3^3}\right)^n = \left(\frac{16}{27}\right)^n < 1$$

$\therefore 2^{4n} < 3^{3n}$

9. $x>3$일 때 $\dfrac{3}{x-3}+2+3x$의 최솟값은?

① 3 ② 5 ③ 12 ④ 15 ⑤ 17

해설

$\dfrac{3}{x-3}+2+3x=3(x-3)+\dfrac{3}{x-3}+11$

이 때, $x>3$이므로 $3(x-3)>0$, $\dfrac{3}{x-3}>0$

산술평균과 기하평균에 의해

$3(x-3)+\dfrac{3}{x-3}+11$

$\geq 2\sqrt{3(x-3)\cdot\dfrac{3}{x-3}}+11$

$=2\cdot 3+11=17$

(단, 등호는 $3(x-3)=\dfrac{3}{x-3}$, 즉 $x=4$일 때 성립)

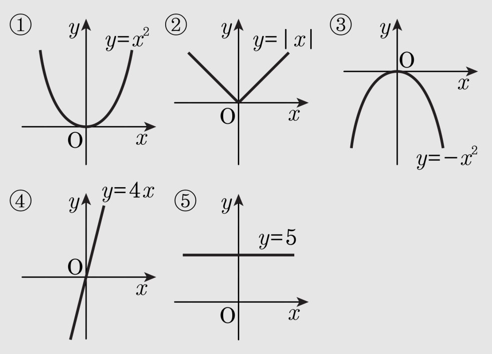
따라서 최솟값은 17

10. 다음 중 일대일 함수는? (x 는 모든 실수)

① $f(x) = x^2$　　② $f(x) = |x|$　　③ $f(x) = -x^2$

④ $f(x) = 4x$　　⑤ $f(x) = 5$

해설



함수 $f : X \rightarrow Y$ 에서 정의역 X 의
각 원소의 함수값이 서로 다를 때 일대일 함수라 한다.

11. 다음 중 명제와 그 역이 모두 참인 것은?

① $x+y=xy$ 이면 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$ 이다.

② $a \neq 0$ 일 때, $ax>b$ 이면 $x>\frac{b}{a}$ 이다.

③ $a>b>0,\ c>d>0$ 이면 $ac>bd,\ \frac{a}{c}>\frac{b}{d}$ 이다.

④ 한 쌍의 대변이 평행하고 그 길이가 같은 사각형은 평행사변형이다.

⑤ 정삼각형에서 꼭지각의 이등분선은 밑변을 수직이등분한다.

해설

① $xy=0$ 이면 성립하지 않으므로 명제가 거짓이다.
② $a \leq 0$ 이면 성립하지 않으므로 명제가 거짓이다.
③ $4>3>0,\ 5>3>0$ 이면 $\frac{4}{5}<\frac{3}{3}$ 이므로 명제가 거짓이다.
⑤ 꼭지각의 이등분선이 밑변을 수직이등분하면 이등변삼각형이므로 명제는 참이지만 역은 거짓이다.

12. 다음 [보기] 중 항상 옳은 것을 모두 고르면?(단, a, b, c 는 실수)

보기

㉠ $\frac{a}{b^2} < \frac{c}{b^2}$ 이면 $a < c$

㉡ $a > b$ 이면 $ac > bc$

㉢ $a < b < 0$ 이면 $a^2 > ab$

㉣ $|a| + |b| > |a + b|$

㉤ $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

① ㉠, ㉤　　② ㉡, ㉣, ㉠　　③ ㉢, ㉣

④ ㉠, ㉢, ㉤　　⑤ ㉠, ㉣, ㉤

해설

㉠ $\frac{a}{b^2} < \frac{c}{b^2}$

$\Rightarrow$ 양변에 b^2 을 곱하면

$a < c$ $(\because b^2 > 0)$

㉡ $a > b$ 이면 $ac > bc$

반례 : $c \leq 0$ 인 경우 : 틀림

㉢ $a^2 - ab = a(a - b) > 0$

㉣ $(|a| + |b|)^2 - |a + b|^2$

$= 2|ab| - 2ab \geq 0$

$\therefore |a| + |b| \geq |a + b|$: 틀림

㉤ $a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca)$

$= \frac{1}{2}\left\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\right\} \geq 0$

$\therefore a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

13. $X = \{x \mid -1 \le x \le 2\}$, $Y = \{y \mid -2 \le y \le 2\}$ 에서 $f : X \to Y$, $f(x) = ax + b(a > 0)$ 로 정의되는 함수 f 가 일대일대응일 때, $\frac{a}{b}$ 의 값은?

① -2　② 2　③ $-\frac{1}{2}$　④ $\frac{1}{2}$　⑤ -1

해설

일대일 대응이고 $a > 0$ 이므로

$f(-1) = -2 \quad f(2) = 2$

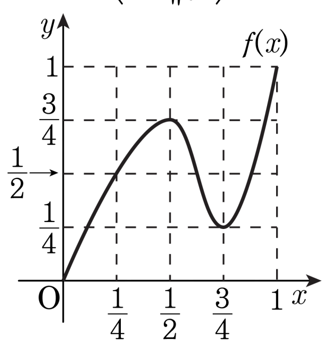
$\therefore \ -a + b = -2, \quad 2a + b = 2$

$\Rightarrow \quad a = \frac{4}{3} \quad b = -\frac{2}{3}$

$\Rightarrow \quad \frac{a}{b} = -2$

14. $R=\{x|0\le x\le 1\}$이라 할 때, R에서 R로의 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같다.(단, $f^n(x)=(f\circ f\circ \ldots \circ f)(x)$: f 개수 n개)

〈그래프〉



이 때, $f\left(\frac{1}{4}\right)+f^2\left(\frac{1}{4}\right)+f^3\left(\frac{1}{4}\right)+\cdots+f^{99}\left(\frac{1}{4}\right)$ 의 값을 구하면?
(단, $f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2},\ f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4},\ f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{4}$)

① $\frac{99}{2}$ ② $\frac{95}{2}$ ③ $\frac{93}{2}$ ④ $\frac{91}{2}$ ⑤ $\frac{89}{2}$

해설

그래프에서 $f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2},\ f^2\left(\frac{1}{4}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4},\ f^3\left(\frac{1}{4}\right)=f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{4},\ \cdots$ 이므로

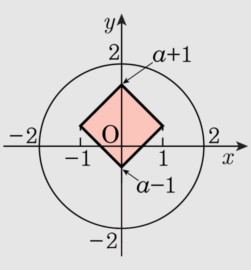
$f^{3k+1}\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2},\ f^{3k+2}\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4},\ f^{3k+3}\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$ $(k=0,\ 1,\ 2,\cdots)$

$\therefore\ f\left(\frac{1}{4}\right)+f^2\left(\frac{1}{4}\right)+f^3\left(\frac{1}{4}\right)+\cdots+f^{99}\left(\frac{1}{4}\right)=33\times\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)=\frac{99}{2}$

15. 두 조건 $p : x^2 + y^2 \le 4$, $q : |x| + |y - a| \le 1$에 대하여 q는 p이기 위한 충분조건일 때, a의 값의 범위를 구하면?

① $-1 < a < 1$　② $-2 < a < 2$　③ $-2 \le a \le 1$
④ $-1 \le a \le 1$　⑤ $-2 \le a \le 2$

해설



두 조건 $p : x^2 + y^2 \le 4$,
$q : |x| + |y - a| \le 1$ 에 대하여
q 는 p 이기 위한 충분조건이므로
각각의 진리집합을 P, Q라 하면 $Q \subset P$
이다.
$x^2 + y^2 = 4$ 는 중심이 원점이고
반지름의 길이가 2인 원이고,
$|x| + |y - a| = 1$ 의 그래프는
$|x| + |y| = 1$ 의 그래프를
y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이다.
이 때 $P = \{(x,\ y) \mid x^2 + y^2 \le 4\}$
$Q = \{(x,\ y) \mid |x| + |y - a| \le 1\}$ 이 나타내는 영역은 다음 그림과 같다.
따라서 $Q \subset P$이려면 다음 그림에서
$a + 1 \le 2$, $a - 1 \ge -2$
$\therefore -1 \le a \le 1$