

1. 두 함수 $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = -3x + 2$ 의 합성함수 $g \circ f$ 를 구하면 무엇인가?

① $y = -6x - 1$

② $y = -6x$

③ $y = -6x + 1$

④ $y = -6x + 3$

⑤ $y = -6x + 5$

해설

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = -3(2x + 1) + 2 = -6x - 1$
이다.

2. 함수 $f(x) = x^2 + x - 2$ 에 대하여 $f(f(1)) + f(f(-2))$ 의 값은?

① -4

② -2

③ 0

④ 2

⑤ 4

해설

$f(x) = (x-1)(x+2)$ 에서

$f(1) = 0, f(-2) = 0, f(0) = -2$ 이고

$f(f(1)) = f(f(-2)) = f(0)$ 이다.

$\therefore f(f(1)) + f(f(-2)) = 2f(0) = -4$

3. 두 함수 $f(x) = ax + b$, $g(x) = ax + c$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 가 성립하기 위한 필요충분조건은 무엇인가?

① $a = 1$ 또는 $b = c$

② $a = 1$

③ $b = c$

④ $a = 0$ 또는 $b = c$

⑤ $a = 0$

해설

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(ax + c) \\ &= a(ax + c) + b \\ &= a^2x + ac + b\end{aligned}$$

마찬가지로 $(g \circ f)(x) = a^2x + ab + c$

$$\therefore ac + b = ab + c$$

$$\text{즉, } (a - 1)(b - c) = 0$$

$$\therefore a = 1 \text{ 또는 } b = c$$

4. 함수 $f(x)$ 가 $f(2x+1) = 3x+2$ 를 만족할 때, $f(3)$ 의 값을 구하면?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$f(2x+1) = 3x+2$ 에서 $2x+1 = 3$ 이므로

$x = 1$ 을 대입하면

$$f(2 \cdot 1 + 1) = f(3) = 3 \cdot 1 + 2 = 5$$

5. 두 함수 $f(x) = x^3 + x^2 + x$, $g(x) = mx + n$ 에 대해 $(f \circ g)(x) = 8x^3 - 8x^2 + 4x - 1$ 이라 할 때, $m^3 + n^3$ 의 값은 얼마인가? (단, m, n 은 실수)

① 7

② 8

③ 9

④ 10

⑤ 11

해설

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ 임을 활용한다.

합성함수의 정의에 의하여,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$= (mx + n)^3 + (mx + n)^2 + mx + n$$

$$= m^3x^3 + 3m^2nx^2 + 3mn^2x + n^3 + m^2x^2$$

$$+ 2mnx + n^2 + mx + n$$

$$= m^3x^3 + (3m^2n + m^2)x^2$$

$$+ (3mn^2 + 2mn + m)x + n^3 + n^2 + n$$

$$= 8x^3 - 8x^2 + 4x - 1$$

주어진 식은 x 에 대한 항등식이므로

$$m^3 = 8, (m - 2)(m^2 + 2m + 4) = 0$$

$$\therefore m = 2 (\because m \text{ 은 실수})$$

$$3m^2n + m^2 = -8 \text{ 에 } m = 2 \text{ 를 대입하면}$$

$$3 \cdot 2^2 \cdot n + 2^2 = -8, 12n + 4 = -8$$

$$\therefore n = -1$$

$$m = 2, n = -1 \text{ 일 때,}$$

x 의 계수와 상수항도 일치하므로

$$\therefore m = 2, n = -1$$

$$\therefore m^3 + n^3 = 2^3 + (-1)^3 = 7$$

6. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 를

$$f(x) \begin{cases} x^2 & (x \text{가 유리수일때}) \\ x^4 & (x \text{가 무리수일때}) \end{cases} \quad g(x) = \sqrt{x} \text{로 정의할 때, } (f \circ f \circ f \circ$$

$g \circ g \circ g)(2)$ 의 값은?

① 2

② 4

③ 8

④ 16

⑤ 32

해설

$$\begin{aligned} f(f(f(g(g(g(2)))))) &= f(f(f(g(g(\sqrt{2})))))) \\ &= f(f(f(g(\sqrt{\sqrt{2}})))) \\ &= f(f(f(\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}})) \\ &= f(f(\sqrt{2})) = f(4) = 16 \end{aligned}$$

7. 두 함수 $f(x) = x + a$, $g(x) = x^2 - 1$ 일 때, 모든 실수 x 에 대하여 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 가 성립하도록 실수 a 의 값을 정하면?

① 0

② -1

③ -2

④ 1

⑤ 4

해설

$g \circ f = f \circ g$ 에서

$$(x + a)^2 - 1 = x^2 - 1 + a,$$

$$x^2 + 2ax + a^2 - 1 = x^2 - 1 + a$$

$$\text{즉 } 2ax + a^2 - a = 0$$

모든 실수 x 에 대해 성립하려면 $a = 0$

8. 함수 $f(x)$ 가 $f(2x - 1) = x + 2$ 일 때, $f(3)$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$2x - 1 = 3$ 으로 놓으면 $x = 2$

$\therefore f(3) = 4$

9. 두 함수 $f(x) = 3x - 1$, $g(x) = 4 - 3x$ 에 대하여 $h \circ f = g$ 를 만족하는 일차함수 $h(x)$ 는?

① $h(x) = \frac{1}{3}(x + 1)$

② $h(x) = 3x - 1$

③ $h(x) = x - 3$

④ $h(x) = 3 - x$

⑤ $h(x) = x + 3$

해설

$$(h \circ f)(x) = 4 - 3x \text{에서}$$

$$f(x) = t \text{라 하면 } t = 3x - 1, 3x = t + 1$$

$$x = \frac{1}{3}(t + 1) \text{ 을 대입하면}$$

$$h(t) = 4 - 3 \times \frac{1}{3}(t + 1) = 3 - t$$

$$\therefore h(x) = 3 - x$$

10. 세 함수 f, g, h 가 $(g \circ f)(x) = x$, $(h \circ f)(x) = -x + 3$ 일 때, $k \circ g = h$ 를 만족시키는 함수 $k(x)$ 를 구하면?

① $k(x) = -x + 1$

② $k(x) = -x + 2$

③ $k(x) = -x + 3$

④ $k(x) = -x + 4$

⑤ $k(x) = -x + 5$

해설

$$k \circ g = h \text{ 이므로 } (k \circ g) \circ f = h \circ f$$

$$k \circ (g \circ f) = h \circ f$$

$$k \circ I = h \circ f (\because g \circ f = I, I \text{는 항등함수})$$

$$\therefore k = h \circ f (\because k \circ I = I \circ k = k)$$

$$\therefore k(x) = (h \circ f)(x) = -x + 3$$

11. $f(x) = x + 1$, $g(x) = 3x - 2$ 일 때, $(g \circ h)(x) = f(x)$ 를 만족시키는 함수 $h(x)$ 를 구하면?

① $h(x) = \frac{1}{3}x + 1$

② $h(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

③ $h(x) = x + \frac{1}{3}$

④ $h(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

⑤ $h(x) = \frac{2}{3}x + 1$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= x + 1, g(x) = 3x - 2 \text{ 일 때,} \\ (g \circ h)(x) &= f(x) \text{ 를 만족해야 하므로} \\ (g \circ h)(x) &= g(h(x)) = 3h(x) - 2 \\ 3h(x) - 2 &= x + 1, 3h(x) = x + 3 \\ \therefore h(x) &= \frac{1}{3}x + 1 \end{aligned}$$

12. 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, $(f \circ g)(p)$ 의 값은 얼마인가? (단, 점선은 x 축 또는 y 축에 평행하다.)

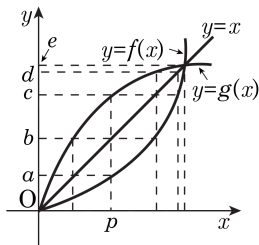
① a

② b

③ c

④ d

⑤ e



해설

주어진 그림에서 $g(p) = c, f(c) = b$

$\therefore (f \circ g)(p) = f(g(p)) = f(c) = b$

13. 함수 $f(x) = x - 1$ 에 대하여 $(f \circ f \circ \cdots \circ f)(a) = 1$ 을 만족하는 상수 a 의 값은? (단, 밑줄 그은 부분의 f 의 갯수는 10개)

① -10

② -5

③ 1

④ 5

⑤ 11

해설

$$f(x) = x - 1$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x - 1) = (x - 1) - 1 = x - 2$$

$$(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(x - 2) = (x - 2) - 1 = x - 3$$

$\vdots$

$$(f \circ f \circ \cdots \circ f)(x) = x - 10$$

밑줄 그은 부분은 10개.

따라서, $a - 10 = 1$ 에서 $a = 11$

14. 집합 $A = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$ 에 대하여 함수 $f : A \rightarrow A$ 를 $f(x) = \begin{cases} x+1 & (0 \leq x \leq 1) \\ x-1 & (1 < x \leq 2) \end{cases}$ 와 같이 정의한다. 이 때, $f\left(\frac{1}{3}\right) + f^2\left(\frac{1}{3}\right) + \dots + f^{30}\left(\frac{1}{3}\right)$ 의 값은?
(단, $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$, $\dots$)

① 20

② 25

③ 30

④ 35

⑤ 40

해설

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

$$f^2\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(f\left(\frac{1}{3}\right)\right) = f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

$$f^3\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(f^2\left(\frac{1}{3}\right)\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

$\vdots$

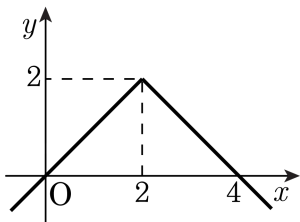
$$\therefore f\left(\frac{1}{3}\right) + f^2\left(\frac{1}{3}\right) + \dots + f^{30}\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= \left\{ f\left(\frac{1}{3}\right) + f^3\left(\frac{1}{3}\right) + \dots + f^{29}\left(\frac{1}{3}\right) \right\}$$

$$+ \left\{ f^2\left(\frac{1}{3}\right) + f^4\left(\frac{1}{3}\right) + \dots + f^{30}\left(\frac{1}{3}\right) \right\}$$

$$= 15 \cdot \frac{4}{3} + 15 \cdot \frac{1}{3} = 25$$

15. $y = f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 방정식 $(f \circ f)(x) = 1$ 의 서로 다른 실근의 개수는?



① 1 개

② 2 개

③ 3 개

④ 4 개

⑤ 무수히 많다.

해설

$$f(x) = \begin{cases} y = x(x \leq 2) & \dots \textcircled{\text{㉠}} \\ y = -x + 4(x > 2) & \dots \textcircled{\text{㉡}} \end{cases}$$

$$\textcircled{\text{㉠}}\text{에서는 } (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x) = x$$

$$\therefore x = 1$$

$$\begin{aligned} \textcircled{\text{㉡}}\text{에서는 } (f \circ f)(x) &= f(f(x)) = f(-x + 4) \\ &= -x + 4 \end{aligned}$$

$$\therefore x = 3$$

실근의 개수 : 2 개.