1. 점 $(1,\ -2)$ 를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축 방향으로 -1만큼 평행이동한 점의 좌표는?

① $(-1,\ -1)$ ② $(-1,\ -3)$ ③ $(3,\ -1)$
④ $(3,\ -3)$ ⑤ $(3,\ 5)$

해설
$(x, y) \ \rightarrow\ (x+2, y-1)$이므로
$(1, -2)\ \rightarrow\ (1+2, -2-1) = (3, -3)$

2. 직선 $2x+3y+7=0$ 을 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동하면 직선 $2x+3y+2=0$ 이 된다. 이때, 상수 k 의 값은?

① -3　　② -2　　③ 1　　④ 2　　⑤ 3

해설

직선 $2x+3y+7=0$ 을 x 축의 방향으로 -2 만큼,
y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동하면,
$2(x+2)+3(y-k)+7=0$
$\therefore\ 2x+3y+11-3k=0$
이 직선이 $2x+3y+2=0$ 과 일치하므로
$11-3k=2 \quad \therefore\ k=3$

3. 직선 $y=2x+3$ 을 x 축의 방향으로 p , y 축의 방향으로 $-2p$ 만큼 평행이동하였더니 직선 $y=2x-5$ 와 일치하였다. 이때, 상수 p 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

직선을 x 축으로 p , y 축으로 $-2p$ 만큼 평행이동하면,

$\Rightarrow \quad y+2p=2(x-p)+3$

$\Rightarrow \quad y=2x-4p+3$

$\Rightarrow \quad -4p+3=-5$

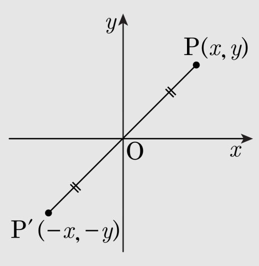
$\therefore \ p=2$

4. 다음 중 좌표평면 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$ 를 원점에 대하여 대칭이동 시키는 것을 나타낸 식은?

① $f:(x,\ y)\ \rightarrow\ (-x,\ -y)$　② $f:(x,\ y)\ \rightarrow\ (-y,\ x)$
③ $f:(x,\ y)\ \rightarrow\ (-x,\ y)$　④ $f:(x,\ y)\ \rightarrow\ (x,\ y)$
⑤ $f:(x,\ y)\ \rightarrow\ (y,\ x)$

해설

좌표 평면 위에 직선 $y=x$ 위에 있지 않은 임의의 한 점을 잡아서 직접 원점에 대해 대칭시켜서 두 점의 좌표 사이의 관계를 찾아본다.
다음 그림과 같이 좌표평면 위의 임의의 점
$\mathrm{P}(x,\ y)$ 을 원점에 대하여 대칭이동 시키면



점 $\mathrm{P}'(-x,\ -y)$ 이 되므로 이를 옳게 나타낸 식은
$f:(x,\ y)\ \rightarrow\ (-x,\ -y)$ 이다.

5. 좌표평면 위의 점 P 를 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 후, 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동하였더니 점 $(3,\ 2)$ 가 되었다. 이 때, 점 P 의 좌표는?

① $(0,\ 2)$ ② $(3,\ -1)$ ③ $(0,\ 3)$
④ $(2,\ 1)$ ⑤ $(1,\ 2)$

해설

점 P 의 좌표를 $(a,\ b)$ 라 하고 점 P 를
x 축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 $(a+2,\ b)$
이 점을 다시 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동하면 $(b,\ a+2)$
이것이 점 $(3,\ 2)$ 와 일치해야 하므로
$b=3,\ a+2=2$
$\therefore\ a=0$
따라서, 점 P 의 좌표는 $(0,\ 3)$ 이다.

6. 점 $(x,\ y)$ 를 점 $(a,\ b)$ 에 대하여 대칭이동한 점을 구하면?

① $(a-x,\ b-y)$
② $(2a-x,\ 2b-y)$
③ $(3a-x,\ 3b-y)$
④ $(4a-x,\ 4b-y)$
⑤ $(5a-x,\ 5b-y)$

해설

점 (x, y) 를 점 (a, b) 에 대하여
대칭이동한 점을 (x', y') 이라고 하면
$\frac{x+x'}{2} = a,\ \ \frac{y+y'}{2} = b$ 이므로
$x' = 2a-x,\ y' = 2b-y$
$\therefore (x',\ y') = (2a-x,\ 2b-y)$

7. 점 $\mathrm{A}(2,\ 1)$를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 점이 $(a,\ b)$일 때, $a+b$의 값은?

① 4　② 5　③ 6　④ 7　⑤ 8

해설

$(2-1,\ \ 1+4)=(a,\ b)$ 따라서 $a+b=6$

8. 평행이동 $f : (x, y) \rightarrow (x-1,\ y+3)$ 에 의하여 점 $(3,\ 1)$ 은 어떤 점으로 옮겨지는가?

① $(2,\ 4)$ ② $(4,\ 2)$ ③ $(2,\ -4)$
④ $(-2,\ 4)$ ⑤ $(4,\ -2)$

해설

f 는 x 축의 방향으로 -1, y 축의 방향으로 $+3$ 만큼 평행이동하는 변환이므로 $(3-1,\ 1+3) = (2,\ 4)$ 로 옮겨진다.

9. 직선 $2x-y+3=0$을 원점에 대하여 대칭이동시킨 직선의 방정식을 구하면?

① $2x+y+3=0$ ② $2x-y-3=0$ ③ $2x+y-3=0$
④ $x-2y-3=0$ ⑤ $x-2y+3=0$

해설

원점대칭은 x, y 부호를 각각 반대로 해주면 된다.
따라서 $x \to -x$, $y \to -y$를 대입한다.

10. 원 $(x+4)^2+(y-3)^2=3$을 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은?

① $(x-4)^2+(y-3)^2=3$
② $(x+4)^2+(y+3)^2=3$
③ $(x+3)^2+(y+4)^2=3$
④ $(x-4)^2+(y+3)^2=3$
⑤ $(x+3)^2+(y-4)^2=3$

해설

원점대칭은 $x,\ y$ 부호를 각각 반대로 해주면 된다.
따라서 $x \to -x,\ y \to -y$를 대입한다.

11. 원 $x^2+y^2-4x-2y+4=0$ 을 y 축에 대하여 대칭이동한 후 다시 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 원의 방정식은?

① $x^2+y^2=1$
② $(x-2)^2+(y+1)^2=1$
③ $(x+2)^2+(y-1)^2=1$
④ $x^2+(y+2)^2=1$
⑤ $(x-2)^2+y^2=1$

해설

$x^2+y^2-4x-2y+4=0$ 에서
$(x-2)^2+(y-1)^2=1$ ……㉠
㉠을 y 축에 대하여 대칭이동하면
$(x+2)^2+(y-1)^2=1$ ……㉡
㉡을 x 축의 방향으로 2 만큼 평행이동하면
$x^2+(y-1)^2=1$ ……㉢
㉢을 y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동하면
$x^2+(y+2)^2=1$

12. 직선 $y = 2x$ 에 대하여 점 $\mathrm{P}(a, b)$ 와 대칭인 점을 Q 라 한다. Q 를 x 축의 양의 방향으로 1만큼 평행이동시킨 점을 R 라고 하면, R과 P 는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이 된다고 한다. 이 때, $2a - 4b$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

R과 $\mathrm{P}(a, b)$ 는 직선 $y = x$ 에 대하여
대칭이므로 $\mathrm{R}(b, a)$ 이고
Q 는 R 을 x 축으로 -1 만큼 이동한 것이므로
$\mathrm{Q}(b-1, a)$ 이다.
또, P 와 Q 는 $y = 2x$ 에 대하여 대칭이므로
$\left(\frac{a+b-1}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$ 는 $y = 2x$ 위의 점이고 $\overline{\mathrm{PQ}}$와 $y = 2x$는 수직이다. $\therefore$ (선분 $\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 기울기)$= \frac{b-a}{a-b+1} = -\frac{1}{2} \cdots$ ① 이고,
$\frac{a+b}{2} = 2\left(\frac{a+b-1}{2}\right) \cdots$ ②
①에서 $a - b = 1$
②에서 $a + b = 2$
$\therefore\ a = \frac{3}{2},\ b = \frac{1}{2}$, $2a - 4b = 3 - 2 = 1$

13. 점 P $(2,\ 1)$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 Q, 원점에 대하여 대칭이동한 점을 R 라 할 때, 세 점 P, Q, R 를 세 꼭짓점으로 하는 $\triangle$PQR 의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

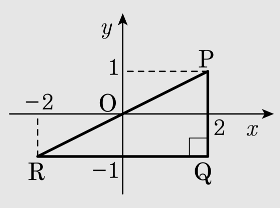
해설

점 P $(2, 1)$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한

점 Q 는 Q $(2, -1)$

또, 점 P $(2, 1)$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 점 R 는 R $(-2, -1)$

따라서, 다음 그림에서 세 점 P $(2, 1)$, Q $(2, -1)$, R $(-2, -1)$ 을 꼭짓점으로 하는$\triangle$PQR 의 넓이는



$\frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$

14. 직선 $3x - 2y + 4 = 0$ 을 점 $(3,\ 1)$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식이 $ax + by + 18 = 0$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① -3　　② -2　　③ -1　　④ 0　　⑤ 1

해설

직선 $3x - 2y + 4 = 0$ 을 주어진 조건대로 대칭이동하면
$3(6 - x) - 2(2 - y) + 4 = 0$
$-3x + 2y + 18 = 0$
따라서, $a = -3$, $b = 2$
$\therefore\ a + b = -1$

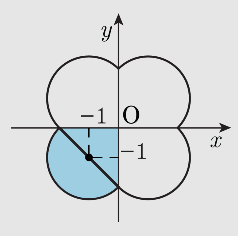
15. 원 $(x+1)^2+(y+1)^2=2$의 제 3사분면에 있는 부분과 이 부분을 각각 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동해서 생기는 모든 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하면?

① $\pi+2$　　② $2\pi+4$　　③ $2\pi+8$

④ $4\pi+8$　　⑤ $8\pi+8$

해설

원 $(x+1)^2+(y+1)^2=2$는 다음 그림과 같으므로



어두운 부분의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\pi\times\sqrt{2}^2+\frac{1}{2}\times2\times2=\pi+2$

따라서 구하는 넓이는 어두운 부분의 넓이의 4배와 같으므로

$4(\pi+2)=4\pi+8$

16. 좌표평면 위의 점 $(a,\ b)$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한 후, 다시 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동하였더니 제 4 사분면의 점이 되었다.
점 $\left(\dfrac{a}{b},\ a+b\right)$ 는 제 몇 사분면에 존재하는가?

① 제 1 사분면 ② 제 2 사분면
③ 제 3 사분면 ④ 제 4 사분면
⑤ x 축 위의 점이다.

해설

점 $(a,\ b)$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점은 $(a,\ -b)$ 이고,
이 점을 다시 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점은 $(-b,\ a)$ 이다.
즉, 점 $(-b,\ a)$가 제4 사분면의 점이므로
$-b>0,\ a<0 \quad \therefore\ a<0,\ b<0$
따라서 $\dfrac{a}{b}>0,\ a+b<0$ 이므로 점 $\left(\dfrac{a}{b},\ a+b\right)$ 는
제4사분면에 존재한다.

17. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 다시 x 축의 양의 방향으로 -1 , y 축의 양의 방향으로 3 만큼 평행이동 하였더니 $y = 2x^2$ 의 그래프와 같을 때, $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

1) x 축 대칭 : y 대신에 $-y$를 대입

$\Rightarrow -y = ax^2 + x + c$

2) x 축으로 -1, y 축으로 3 이동

$\Rightarrow -(y-3) = a(x+1)^2 + b(x+1) + c$

$\Rightarrow y = -ax^2 - (2a+b)x + 3 - a - b - c$

$y = 2x^2$ 과 비교한다.

$\therefore a = -2,\ b = 4,\ c = 1$

$\Rightarrow a + b + c = 3$

18. 원 $x^2 + y^2 - 10x - 8y + 40 = 0$ 을 직선 $3x + ay + 6 = 0$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식이 $(x+1)^2 + (y-8)^2 = 1$ 일 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$x^2 + y^2 - 10x - 8y + 40 = 0$ 을 표준형으로 나타내면
$(x-5)^2 + (y-4)^2 = 1 \cdots\cdots$ ㉠
㉠은 원 $(x+1)^2 + (y-8)^2 = 1$ 과
직선 $3x + ay + 6 = 0$ 에 대하여 대칭이므로
두 원의 중심 $(5, 4)$, $(-1,\ 8)$ 을 이은 선분의
중점이 직선 $3x + ay + 6 = 0$ 위에 있다.
두 점 $(5, 4), (-1, 8)$ 을 이은 선분의 중점은
$\left(\frac{5+(-1)}{2}, \frac{4+8}{2}\right)$, 즉 $(2, 6)$ 이므로
$3 \cdot 2 + a \cdot 6 + 6 = 0$
$\therefore a = -2$

19. 원 $(x+1)^2+(y-1)^2=9$을 점 $(4,\ 2)$에 대하여 대칭이동한 원의 중심은?

① $(4,\ 2)$ ② $(9,\ 3)$ ③ $(5,\ 1)$
④ $(3,\ 3)$ ⑤ $(8,\ 4)$

해설

중심을 대칭이동했다고 보면 된다.
구하려는 중심을 $(a,\ b)$라 하면
$(x+1)^2+(y-1)^2=9$의 중심$(-1,\ 1)$과 구하려는 중심 $(a,\ b)$의 중점은 $(4,\ 2)$
따라서 두 중심의 중점인
$\left(\frac{a-1}{2},\ \frac{b+1}{2}\right)=(4,\ 2)$
$\therefore a=9,\ b=3$

20. 원 $x^2+y^2-6x+2y+1=0$ 을 한 직선 l 에 대하여 대칭이동하면 자기 자신이 된다고 할 때, 다음 중 직선 l 로 알맞은 것은?

① $y=2x+3$ ② $y=-2x+1$ ③ $y=x+3$
④ $y=-x+2$ ⑤ $y=3x-2$

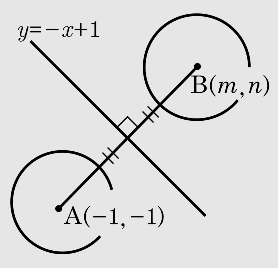
해설

$x^2+y^2-6x+2y+1=0$ 에서
$(x-3)^2+(y+1)^2=9$
이 원이 직선 l 에 대하여 대칭이어야 하므로
직선 l 이 원의 중심 $(3,-1)$ 을 지나야 한다.
보기의 직선 중 $(3,-1)$ 을 지나는 것은 ④뿐이다.

21. 원 $(x+1)^2+(y+1)^2=1$ 을 직선 $y=-x+1$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식이 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ 일 때, $a+b+c$ 의 값은?

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 3 ⑤ 5

해설



원 $(x+1)^2+(y+1)^2=1$ 을 직선 $y=-x+1$ 에 대하여 대칭이동한 도형은 반지름의 길이가 1 인 원이다.

이 때, 옮기기 전의 원의 중심을 $\mathrm{A}(-1,-1)$,

옮긴 후의 원의 중심을 $\mathrm{B}(m,n)$ 이라고 하면

선분 AB 는 직선 $y=-x+1$ 과 수직이므로

$\frac{n+1}{m+1}\cdot(-1)=-1$ 에서

$m=n$ ······ ㉠

또한, 선분 AB 의 중점 $\left(\frac{m-1}{2},\frac{n-1}{2}\right)$ 은

직선 $y=-x+1$ 위에 있으므로

$\frac{n-1}{2}=-\frac{m-1}{2}+1$ 에서

$m+n=4$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$m=2, n=2$

따라서, 대칭이동하여 옮겨진 원은 중심이 $(2,2)$ 이고 반지름의 길이가 1 이므로 그 방정식은

$(x-2)^2+(y-2)^2=1$

즉, $x^2+y^2-4x-4y+7=0$

$\therefore a=-4, b=-4, c=7$

$\therefore a+b+c=-1$

22. 두 점 $A(-6,\ 1)$, $B(2,\ 5)$ 가 직선 $y = ax + b$ 에 대하여 대칭일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = -3$

해설

두 점 A 와 B 가 $y = ax + b$ 에 대하여 대칭이므로
$\overline{AB}$ 의 중점 $(-2,\ 3)$ 은 직선
$y = ax + b$ 위에 있다.
$\therefore\ 3 = -2a + b\ \cdots$ ㉠
또한, 직선 AB 와 직선 $y = ax + b$ 가
서로 수직이므로
($\overline{AB}$ 의 기울기) $\times a = -1$ 에서
$\frac{5-1}{2-(-6)} \times a = -1$
$\therefore\ a = -2$ $a = -2$ 를 ㉠ 에 대입하면
$b = -1$ $\therefore\ a + b = -3$

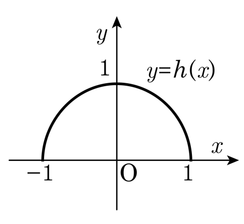
23. 좌표평면 위의 원 $x^2 + y^2 = 8$을 직선 $y = ax + b$에 대하여 대칭이동시켰더니 원 $x^2 + y^2 - 8x - 4y + c = 0$이 되었다. 이 때, $a + b + c$의 값은?

① 13　② 14　③ 15　④ 16　⑤ 17

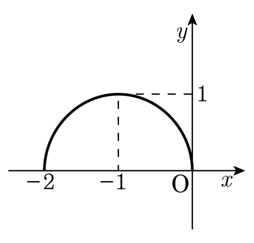
해설

중심을 대칭이동했다고 보면 된다. 구하려는 중심을 $(a,\ b)$라 하면,
$x^2 + y^2 = 8$의 중심 $(0,\ 0)$과 $x^2 + y^2 - 8x - 4y + c = 0$의 중심인 $(4,\ 2)$의 중점은 $y = ax + b$ 위를 지나고,
두 점을 이은 직선과 $y = ax + b$는 수직이다.
따라서 중점인 $(2\ ,\ 1\ )$를 $y = ax + b$에 대입하면 $1 = 2a + b$.
수직조건은 기울기의 곱이 -1이므로
$y = ax + b$의 기울기가 a이므로
두 중심을 지나는 기울기는 $\frac{1}{2}$,
따라서 $a = -2$, $b = 5$, 그리고 원의 반지름은 같으므로 $20-c = 8$.
$c = 12$

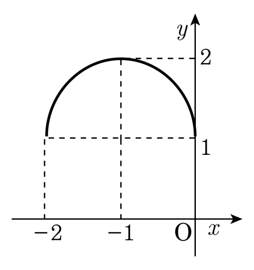
24. 함수 $y=f(x)$ 에 대하여 $g(x)=f(x-2)+1$, $h(x)=g(x+1)-2$ 라고 할 때, $y=h(x)$ 의 그래프는 그림과 같이 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1 인 원의 일부이다. 이 때, 다음 중 $y=f(x)$ 의 그래프로 옳은 것은?



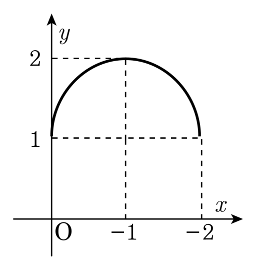
①



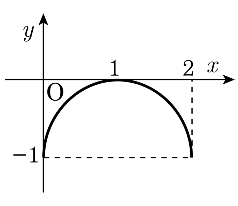
②



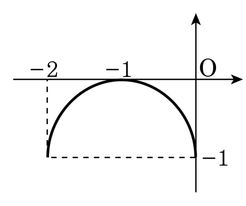
③



④

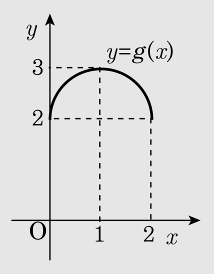


⑤

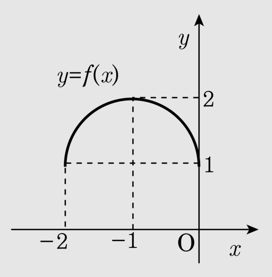


해설

$y=h(x)$ 의 그래프는 $y=g(x)$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 -1 만큼,
y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이므로
$y=g(x)$ 의 그래프는 $y=h(x)$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼
평행이동한 것이다.
따라서, $y=g(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



또, $y=g(x)$ 의 그래프는 $y=f(x)$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼
평행이동한 것이므로 $y=f(x)$ 의 그래프는
$y=g(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼,
y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.
따라서, $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



25. 다음 중 원 $x^2+y^2+2x-4y+4=0$ 을 평행이동하여 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은?

① $x^2+y^2=\frac{1}{2}$　　② $x^2+y^2=1$
③ $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$　　④ $(x+1)^2+y^2=2$
⑤ $(x+1)^2+(y-1)^2=\frac{1}{4}$

해설

평행이동하여 겹쳐질 수 있으려면
반지름의 길이가 같아야 한다.
$x^2+y^2+2x-4y+4=0$ 에서 $(x+1)^2+(y-2)^2=1$
따라서 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은
반지름의 길이가 1 인 ②이다.

26. 좌표평면 위의 점 $P(x,\ y)$ 가 다음과 같은 규칙에 따라 이동하거나 이동하지 않는다. P가 점 $A(6,\ 5)$ 에서 출발하여 이던 점 B 에서 더 이상 이동하지 않게 되었다. A 에서 B 에 이르기까지 이동한 횟수는?

㉠ $y = 2x$ 이면 이동하지 않는다.
㉡ $y < 2x$ 이면 x 축 방향으로 -1만큼 이동한다.
㉢ $y > 2x$ 이면 y 축 방향으로 -1만큼 이동한다.

① 4회 ② 5회 ③ 6회 ④ 7회 ⑤ 8회

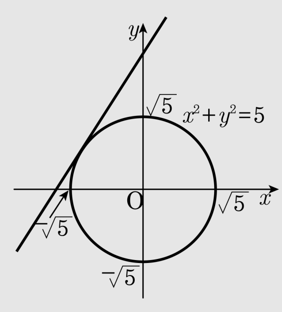
해설

$(6,\ 5) \to (5,\ 5) \to (4,\ 5) \to (3,\ 5) \to (2,\ 5) \to (2,\ 4)$
$\therefore$ 5 회 이동한다.

27. 직선 $y=2x+8$ 을 x 축의 방향으로 m 만큼 평행이동한 직선 l_1 과 y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 직선 l_2 가 모두 원 $x^2+y^2=5$ 와 제2 사분면에서 접한다. 이 때, $m+n$ 의 값은?

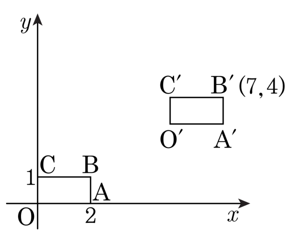
① $-\frac{3}{2}$　　② $-\frac{1}{2}$　　③ $\frac{1}{2}$　　④ $\frac{3}{2}$　　⑤ $\frac{5}{2}$

해설



직선 $y=2x+8$ 을 평행이동하면
원 $x^2+y^2=5$ 와 접하므로 접선의
기울기는 2 이다.
원 $x^2+y^2=5$ 와 제2 사분면에서 접
하고 기울기가 2 인 접선의 방정식은
$y=2x+\sqrt{5}\cdot\sqrt{1+2^2}$
즉, $y=2x+5$ 이고,
이것이 두 직선 l_1, l_2 와 일치한다.
이때, 직선 $y=2x+8$ 을 x 축의 방향으로
m 만큼 평행이동한 직선의 방정식은
$y=2(x-m)+8$　　$\therefore l_1 : y=2x-2m+8$
이것이 직선 $y=2x+5$ 와 일치하므로
$-2m+8=5$　　$\therefore m=\frac{3}{2}$
또한, 직선 $y=2x+8$ 을 y 축의 방향으로 n 만큼
평행이동한 직선의 방정식은
$y-n=2x+8$　　$\therefore l_2 : y=2x+8+n$
이것이 직선 $y=2x+5$ 와 일치하므로
$8+n=5$　　$\therefore n=-3$
$\therefore m+n=\frac{3}{2}-3=-\frac{3}{2}$

28. 좌표평면에서 원점 O 와 두 점 A(2, 0), C(0, 1) 에 대하여 $\overline{\mathrm{OA}}, \overline{\mathrm{OC}}$ 를 두 변으로 하는 직사각형 OABC 를 평행 이동하여 $\mathrm{O} \to \mathrm{O'}, \mathrm{A} \to \mathrm{A'}, \mathrm{B} \to \mathrm{B'}, \mathrm{C} \to \mathrm{C'}$ 으로 옮겨지도록 하였다. 점 B′ 의 좌표가 (7, 4) 일 때, 직선 A′C′ 의 방정식은?



① $x+2y-10=0$　② $x+2y-13=0$
③ $x+2y-16=0$　④ $2x+3y-17=0$
⑤ $2x+3y-19=0$

해설

점 $\mathrm{B}(2,1)$ 이 점 $\mathrm{B'}(7,4)$ 로 옮겨지므로
직사각형 O′A′B′C′ 은 직사각형 OABC 를
x 축의 방향으로 5, y 축의 방향으로 3만큼 평행 이동한 것이다.
따라서 두 점 $\mathrm{A}(2,0)$, $\mathrm{C}(0,1)$ 은 각각 $\mathrm{A'}(7,3)$, $\mathrm{C'}(5,4)$ 로 옮겨지므로
직선 A′C′ 의 방정식은 $y-3=\dfrac{4-3}{5-7}(x-7)$
$\therefore\ y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{13}{2}$
$\therefore\ x+2y-13=0$

해설

직선 A′C′ 은 직선 AC 를 평행이동한 것이므로
직선 A′C′ 의 기울기는 직선 AC 의 기울기인 $-\dfrac{1}{2}$ 이다.
한편, $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{A'B'}}=1$ 에서 점 A′ 의 좌표는 $(7,3)$ 이므로
이것을 $y=-\dfrac{1}{2}x+b$ 에 대입하여 정리하면 $b=\dfrac{13}{2}$ 이다.
따라서 구하는 직선 A′C′ 의 방정식은
$y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{13}{2}$,
$\therefore\ x+2y-13=0$

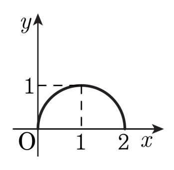
29. 포물선 $y=x^2$ 을 x 축에 대하여 대칭이동시킨 후, 다시 y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동시켰더니 직선 $y=x-1$ 에 접하였다. 이 때, a 의 값은?

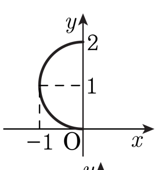
① $-\frac{7}{4}$　② $-\frac{5}{4}$　③ $-\frac{3}{4}$　④ $-\frac{1}{4}$　⑤ 0

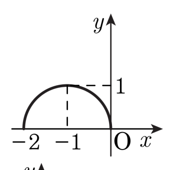
해설

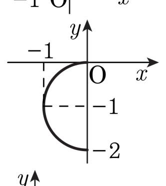
$y=x^2$ 을 x 축에 대하여 대칭이동하면 $-y=x^2$ 이고
이를 다시 y 축 방향으로 a 만큼 평행이동 하면,
$-(y-a)=x^2,\quad y=-x^2+a$
이 곡선이 $y=x-1$ 에 접하려면
$x-1=-x^2+a$, $x^2+x-a-1=0$ 에서
$D=1^2-4(-a-1)=0$
$\therefore\ a=-\frac{5}{4}$

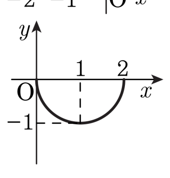
30. 도형 $f(x,\ y)=0$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 도형 $f(-y,\ -x)=0$ 의 그래프로 옳은 것은?

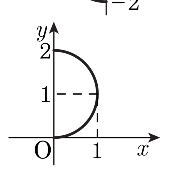


①


②


③


④


⑤


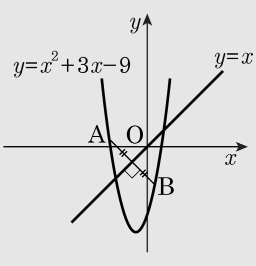
해설

도형 $f(-y,\ -x)=0$ 의 그래프는
도형 $f(x,\ y)=0$ 의 그래프를
직선 $y=-x$ 에 대하여 대칭이동 한 것이다.

31. 포물선 $y = x^2 + 3x - 9$ 위의 서로 다른 두 점 A, B 가 직선 $y = x$ 에 대하여 서로 대칭일 때, 두 점 A, B 사이의 거리는?

① $3\sqrt{2}$ ② $4\sqrt{2}$ ③ $6\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{3}$ ⑤ $5\sqrt{3}$

해설

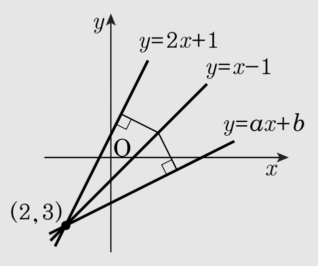


A 의 좌표를 $(a,\ b)$ 라 두면
B 의 좌표는 $(b,\ a)$ 가 된다.
두 점은 포물선 위의 점이므로
$a = b^2 + 3b - 9,\ b = a^2 + 3a - 9$ 가 성립한다.
두 식을 변변 빼서 정리하면
$(a-b)\ (a+b+4) = 0$
$\therefore\ a + b + 4 = 0\ (\because a \neq b)$
$b = -a-4$ 를 $b = a^2 + 3a - 9$ 에 대입하면
$a^2 + 4a - 5 = 0,\ (a+5)(a-1) = 0$
$a = 1$ 또는 -5, $b = -5$ 또는 1 이므로
$\mathrm{A}(-5,\ 1)$, $\mathrm{B}(1,\ -5)$ 가 된다.
$\therefore \overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$

32. 직선 $y = 2x+1$ 을 직선 $y = x-1$ 에 대하여 대칭이동 시킬 때, 이동된 도형의 방정식을 구하면?

① $x - 2y - 3 = 0$　　② $x - 2y - 4 = 0$
③ $2x - 3y + 3 = 0$　　④ $2x - 3y + 4 = 0$
⑤ $2x - 3y + 5 = 0$

해설



i) 먼저 $y = 2x + 1$ 과$y = x - 1$ 의 교점을 구하면 $(2, 3)$ 이다.
그리고 이점은 $y = ax + b$ 를 지난다.
$\therefore 3 = 2a + b$
ii) 그리고 $y = x - 1$ 의 임의의 점에서
$y = 2x + 1$, $y = ax + b$ 에 이르는 거리는 같다.
$y = ax + b$ 와의 거리 :

$$\frac{|a + 0 + b|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

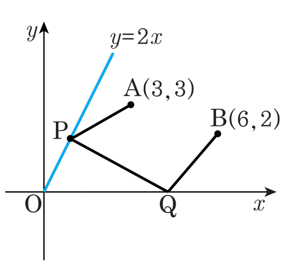
$$\Rightarrow \quad \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{|a + b|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

i) 에서 구한
$2a + b = 3$ 을 이용하여 연립하면
$a = 2,\ \ b = 1$ 또는 $a = \frac{1}{2},\ \ b = -2$

$$\therefore \quad y = \frac{1}{2}x - 2$$

($\because$ $y = 2x + 1$ 는 두 직선이 일치)

33. 좌표평면 위에 두 점 $\mathrm{A}(3,3)$, $\mathrm{B}(6,2)$ 와 직선 $y = 2x$ 위를 움직이는 점 P , x 축 위를 움직이는 점 Q 가 있다. 이때, $\overline{\mathrm{AP}} + \overline{\mathrm{PQ}} + \overline{\mathrm{QB}}$ 의 최솟값은?

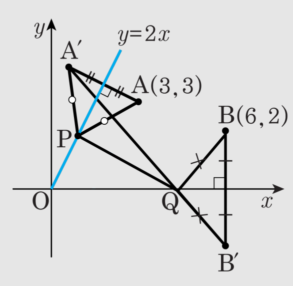


① $\dfrac{11\sqrt{5}}{5}$ ② $\dfrac{11\sqrt{10}}{5}$

③ $\dfrac{13\sqrt{5}}{5}$ ④ $\dfrac{13\sqrt{10}}{5}$

⑤ $3\sqrt{5}$

해설



다음 그림과 같이 점 $\mathrm{A}(3,3)$ 을 직선
$y = 2x$ 에
대하여 대칭이동한 점을 A′ 이라 하
고 점 B 를
x 축에 대하여 대칭이동한 점을 B′
이라고 하면
$\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{A'P}}, \overline{\mathrm{BQ}} = \overline{\mathrm{B'Q}}$ 이므로
$\overline{\mathrm{AP}} + \overline{\mathrm{PQ}} + \overline{\mathrm{QB}} = \overline{\mathrm{A'P}} + \overline{\mathrm{PQ}} + \overline{\mathrm{QB'}}$
$\geq \overline{\mathrm{A'B'}}$
따라서, 구하는 최솟값은 선분 A′B′ 의 길이이다.
이때, 점 $\mathrm{A'}(a, b)$ 라고 하면
직선 AA′ 과 직선 $y = 2x$ 가 수직이므로
$\dfrac{b-3}{a-3} \cdot 2 = -1$
$\therefore a + 2b = 9 \cdots\cdots$ ㉠
또한, 선분 AA′ 의 중점 $\left(\dfrac{a+3}{2}, \dfrac{b+3}{2}\right)$ 은
직선 $y = 2x$ 위에 있으므로
$\dfrac{b+3}{2} = 2 \cdot \dfrac{a+3}{2}$
$\therefore 2a - b = -3 \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a = \dfrac{3}{5},\ b = \dfrac{21}{5}$
$\therefore \mathrm{A'}\left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{21}{5}\right)$
한편, 점 $\mathrm{B'}(6, -2)$ 이므로

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{A'B'}} &= \sqrt{\left(6-\frac{3}{5}\right)^2 + \left(-2-\frac{21}{5}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{27}{5}\right)^2 + \left(-\frac{31}{5}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1690}{25}} = \frac{13\sqrt{10}}{5}\end{aligned}$$

따라서, 구하는 최솟값은 $\dfrac{13\sqrt{10}}{5}$ 이다.