1. 세 수 $A = 3\sqrt{3} - 1$, $B = \sqrt{3} + 2$, $C = 2\sqrt{3} + 1$ 의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $C < B < A$　　② $A < B < C$　　③ $A < C < B$

④ $B < A < C$　　⑤ $B < C < A$

해설

i) $A - B = (3\sqrt{3} - 1) - (\sqrt{3} + 2)$
$= 2\sqrt{3} - 3 = \sqrt{12} - \sqrt{9} > 0$
$\therefore A > B$

ii) $B - C = (\sqrt{3} + 2) - (2\sqrt{3} + 1)$
$= 1 - \sqrt{3} < 0$
$\therefore B < C$

iii) $C - A = (2\sqrt{3} + 1) - (3\sqrt{3} - 1)$
$= 2 - \sqrt{3} = \sqrt{4} - \sqrt{3} > 0$
$\therefore C > A$

따라서 $B < A < C$

2. $0 < a < 1$일 때, $P = \frac{1}{a}$, $Q = \frac{1}{2-a}$, $R = \frac{a}{2+a}$ 의 대소 관계로 옳은 것은?

① $P < R < Q$　　② $R < Q < P$　　③ $Q < P < R$
④ $Q < R < P$　　⑤ $R < P < Q$

해설

i) $\frac{1}{a} - \frac{1}{2-a} = \frac{2-a-a}{a(2-a)} = \frac{2(1-a)}{a(2-a)}$
이 때 $a > 0,\ 2-a > 0,\ 1-a > 0$ 이므로

$\frac{2(1-a)}{a(2-a)} > 0$　　$\therefore \frac{1}{a} > \frac{1}{2-a}$

즉, P>Q

ii) $\frac{1}{a} - \frac{a}{2+a} = \frac{2+a-a^2}{a(2+a)} = \frac{-(a-2)(a+1)}{a(2+a)}$

이 때 $a > 0,\ 2+a > 0,\ a-2 < 0, a+1 > 0$ 이므로

$\frac{-(a-2)(a+1)}{a(2+a)} > 0$　　$\therefore \frac{1}{a} > \frac{a}{2+a}$

즉, P>R

iii) $\frac{1}{2-a} - \frac{a}{2+a} = \frac{2+a-a(2-a)}{(2-a)(2+a)}$

$= \frac{2+a-2a+a^2}{(2-a)(2+a)} = \frac{a^2-a+2}{(2-a)(2+a)}$

이 때 $2-a > 0, 2+a > 0, a^2-a+2 > 0$이므로 $\frac{1}{2-a} > \frac{a}{2+a}$

$\therefore Q > R$ 따라서, $P > Q > R$이다.

3. $x>0$, $y>0$ 일 때 두 식 $\sqrt{x}+\sqrt{y}$, $\sqrt{2(x+y)}$ 를 바르게 비교한 것은?

① $\sqrt{x}+\sqrt{y}<\sqrt{2(x+y)}$
② $\sqrt{x}+\sqrt{y}\le\sqrt{2(x+y)}$
③ $\sqrt{x}+\sqrt{y}>\sqrt{2(x+y)}$
④ $\sqrt{x}+\sqrt{y}\ge\sqrt{2(x+y)}$
⑤ $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2(x+y)}$

해설

$\sqrt{x}+\sqrt{y}>0$, $\sqrt{2(x+y)}>0$

이 때 $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2-\left\{\sqrt{2(x+y)}\right\}^2$

$=(x+y+2\sqrt{xy})-(2x-2y)$

$=-(x-2\sqrt{xy}+y)$

$=-(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\le 0$

이므로 $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2\le\left\{\sqrt{2(x+y)}\right\}^2$

$\therefore(\sqrt{x}+\sqrt{y})\le\sqrt{2(x+y)}$

(단, 등호는 $\sqrt{x}=\sqrt{y}$, 즉 $x=y$일때성립)

4. $a>0,\ b>0$ 일 때, $\sqrt{2(a+b)}$, $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 의 대소를 바르게 나타낸 것은?

① $\sqrt{2(a+b)} < \sqrt{a}+\sqrt{b}$
② $\sqrt{2(a+b)} \leq \sqrt{a}+\sqrt{b}$
③ $\sqrt{2(a+b)} > \sqrt{a}+\sqrt{b}$
④ $\sqrt{2(a+b)} \geq \sqrt{a}+\sqrt{b}$
⑤ $\sqrt{2(a+b)} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$

해설

$(\sqrt{2(a+b)})^2-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$
$=2(a+b)-(a+2\sqrt{a}\sqrt{b}+b)$
$=a-2\sqrt{a}\sqrt{b}+b$
$=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq 0$
(단, 등호는 $a=b$일 때 성립)
따라서 $\sqrt{2(a+b)}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}$

5. 실수 a, b 에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

㉠ $\lvert a\rvert^2 = a^2$	㉡ $\lvert ab\rvert \geq ab$
㉢ $\lvert a\rvert + \lvert b\rvert \geq \lvert a-b\rvert$	㉣ $\lvert a\rvert - \lvert b\rvert \geq \lvert a-b\rvert$

① ㉠, ㉡　　② ㉡, ㉢　　③ ㉠, ㉡, ㉢
④ ㉠, ㉢, ㉣　　⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉣ $(\lvert a\rvert - \lvert b\rvert)^2 - \lvert a-b\rvert^2$
$= \lvert a\rvert^2 - 2\lvert a\rvert\lvert b\rvert + \lvert b\rvert^2 - (a-b)^2$
$= 2(ab - \lvert ab\rvert) \leq 0$

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉡, ㉢ 이다.

6. 부등식 $|x+y| \le |x|+|y|$ 에서 등호가 성립할 필요충분조건은?

① $x=y$ ② $xy>0$ ③ $xy \ge 0$

④ $x \ge 0,\ y \ge 0$ ⑤ $x \le 0,\ y \le 0$

해설

$|x+y| = |x|+|y|$ 의 양변을 제곱하여 정리하면

$xy = |xy|$

(i) $xy = |xy| \quad \Rightarrow \quad xy \ge 0$

(ii) 또 $xy > 0$ 이면 $x,\ y$ 는 같은 부호이므로 등식이 성립한다.

$xy = 0$ 이면 등호가 성립한다.

따라서, $xy \ge 0 \quad \Rightarrow \quad xy = |xy|$

(i), (ii) 에서

$xy = |xy| \Leftrightarrow xy \ge 0$

7. 실수 a, b, c, x, y에 대하여 항상 성립하는 부등식(절대부등식)을 다음 [보기] 중에서 고를 때, 옳은 표현의 개수는?

보기

(가) $x^2 - xy + y^2 \geq 0$
(나) $x^2 - x + 1 > 0$
(다) $|a + b| \leq |a| + |b|$
(라) $a + b \geq 2\sqrt{ab}$
(마) $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$
(바) $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$

① 6개　② 5개　③ 4개　④ 3개　⑤ 2개

해설

(라) $a + b \geq 2\sqrt{ab}$(단, $a = b$일때 등호성립)
(마) $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$(단, $a = b = c$일때 등호성립)

8. 실수 x, y에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

㉠ $\lvert x\rvert + \lvert y\rvert \ge \lvert x+y\rvert$	㉡ $\lvert x+y\rvert \ge \lvert x-y\rvert$
㉢ $\lvert x-y\rvert \ge \lvert x\rvert - \lvert y\rvert$	

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡ ④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠ $(\lvert x\rvert + \lvert y\rvert)^2 - \lvert x+y\rvert^2 = 2(\lvert xy\rvert - xy) \ge 0$

$\therefore\ \lvert x\rvert + \lvert y\rvert \ge \lvert x+y\rvert$

㉡ (반례) $x = 1, y = -1$ 일 때

$\lvert 1+(-1)\rvert = 0,\ \ \lvert 1-(-1)\rvert = 2$ 이므로

$\lvert x+y\rvert < \lvert x-y\rvert$

㉢ $\lvert x-y\rvert^2 - (\lvert x\rvert - \lvert y\rvert)^2 = 2(\lvert xy\rvert - xy) \ge 0$

$\therefore\ \lvert x-y\rvert \ge \lvert x\rvert - \lvert y\rvert$

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉢ 이다.