

1. 세 수 $A = 3\sqrt{3} - 1$, $B = \sqrt{3} + 2$, $C = 2\sqrt{3} + 1$ 의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $C < B < A$

② $A < B < C$

③ $A < C < B$

④ $B < A < C$

⑤ $B < C < A$

해설

$$\begin{aligned}\text{i) } A - B &= (3\sqrt{3} - 1) - (\sqrt{3} + 2) \\ &= 2\sqrt{3} - 3 = \sqrt{12} - \sqrt{9} > 0 \\ \therefore A &> B\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ii) } B - C &= (\sqrt{3} + 2) - (2\sqrt{3} + 1) \\ &= 1 - \sqrt{3} < 0 \\ \therefore B &< C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{iii) } C - A &= (2\sqrt{3} + 1) - (3\sqrt{3} - 1) \\ &= 2 - \sqrt{3} = \sqrt{4} - \sqrt{3} > 0 \\ \therefore C &> A\end{aligned}$$

따라서 $B < A < C$

2. $0 < a < 1$ 일 때, $P = \frac{1}{a}$, $Q = \frac{1}{2-a}$, $R = \frac{a}{2+a}$ 의 대소 관계로 옳은 것은?

① $P < R < Q$

② $R < Q < P$

③ $Q < P < R$

④ $Q < R < P$

⑤ $R < P < Q$

해설

$$\text{i) } \frac{1}{a} - \frac{1}{2-a} = \frac{2-a-a}{a(2-a)} = \frac{2(1-a)}{a(2-a)}$$

이 때 $a > 0$, $2-a > 0$, $1-a > 0$ 이므로

$$\frac{2(1-a)}{a(2-a)} > 0 \quad \therefore \frac{1}{a} > \frac{1}{2-a}$$

즉, $P > Q$

$$\text{ii) } \frac{1}{a} - \frac{a}{2+a} = \frac{2+a-a^2}{a(2+a)} = \frac{-(a-2)(a+1)}{a(2+a)}$$

이 때 $a > 0$, $2+a > 0$, $a-2 < 0$, $a+1 > 0$ 이므로

$$\frac{-(a-2)(a+1)}{a(2+a)} > 0 \quad \therefore \frac{1}{a} > \frac{a}{2+a}$$

즉, $P > R$

$$\begin{aligned} \text{iii) } \frac{1}{2-a} - \frac{a}{2+a} &= \frac{2+a-a(2-a)}{(2-a)(2+a)} \\ &= \frac{2+a-2a+a^2}{(2-a)(2+a)} = \frac{a^2-a+2}{(2-a)(2+a)} \end{aligned}$$

이 때 $2-a > 0$, $2+a > 0$, $a^2-a+2 > 0$ 이므로 $\frac{1}{2-a} > \frac{a}{2+a}$

$\therefore Q > R$ 따라서, $P > Q > R$ 이다.

3. $x > 0, y > 0$ 일 때 두 식 $\sqrt{x} + \sqrt{y}, \sqrt{2(x+y)}$ 를 바르게 비교한 것은?

① $\sqrt{x} + \sqrt{y} < \sqrt{2(x+y)}$

② $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \sqrt{2(x+y)}$

③ $\sqrt{x} + \sqrt{y} > \sqrt{2(x+y)}$

④ $\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq \sqrt{2(x+y)}$

⑤ $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2(x+y)}$

해설

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} > 0, \sqrt{2(x+y)} > 0$$

$$\begin{aligned}\text{이 때 } & (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 - \left\{ \sqrt{2(x+y)} \right\}^2 \\ &= (x + y + 2\sqrt{xy}) - (2x - 2y) \\ &= -(x - 2\sqrt{xy} + y) \\ &= -(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \leq 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{이므로 } & (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 \leq \left\{ \sqrt{2(x+y)} \right\}^2 \\ \therefore & (\sqrt{x} + \sqrt{y}) \leq \sqrt{2(x+y)} \\ & (\text{단, 등호는 } \sqrt{x} = \sqrt{y}, \text{ 즉 } x = y \text{ 일 때 성립})\end{aligned}$$

4. $a > 0, b > 0$ 일 때, $\sqrt{2(a+b)}, \sqrt{a} + \sqrt{b}$ 의 대소를 바르게 나타낸 것은?

① $\sqrt{2(a+b)} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

② $\sqrt{2(a+b)} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

③ $\sqrt{2(a+b)} > \sqrt{a} + \sqrt{b}$

④ $\sqrt{2(a+b)} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

⑤ $\sqrt{2(a+b)} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

해설

$$\begin{aligned} & (\sqrt{2(a+b)})^2 - (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \\ &= 2(a+b) - (a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b) \\ &= a - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b \\ &= (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \\ & \text{(단, 등호는 } a=b \text{ 일 때 성립)} \end{aligned}$$

따라서 $\sqrt{2(a+b)} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

5. 실수 a, b 에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

$$\textcircled{\text{㉠}} |a|^2 = a^2$$

$$\textcircled{\text{㉡}} |ab| \geq ab$$

$$\textcircled{\text{㉢}} |a| + |b| \geq |a - b|$$

$$\textcircled{\text{㉣}} |a| - |b| \geq |a - b|$$

$$\textcircled{1} \textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}}$$

$$\textcircled{2} \textcircled{\text{㉡}}, \textcircled{\text{㉢}}$$

$$\textcircled{3} \textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}}, \textcircled{\text{㉢}}$$

$$\textcircled{4} \textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉢}}, \textcircled{\text{㉣}}$$

$$\textcircled{5} \textcircled{\text{㉡}}, \textcircled{\text{㉢}}, \textcircled{\text{㉣}}$$

해설

$$\begin{aligned}\textcircled{\text{㉣}} & (|a| - |b|)^2 - |a - b|^2 \\ &= |a|^2 - 2|a||b| + |b|^2 - (a - b)^2 \\ &= 2(ab - |ab|) \leq 0\end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 $\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}}, \textcircled{\text{㉢}}$ 이다.

6. 부등식 $|x + y| \leq |x| + |y|$ 에서 등호가 성립할 필요충분조건은?

① $x = y$

② $xy > 0$

③ $xy \geq 0$

④ $x \geq 0, y \geq 0$

⑤ $x \leq 0, y \leq 0$

해설

$|x + y| = |x| + |y|$ 의 양변을 제곱하여 정리하면

$$xy = |xy|$$

(i) $xy = |xy| \Rightarrow xy \geq 0$

(ii) 또 $xy > 0$ 이면 x, y 는 같은 부호이므로 등식이 성립한다.

$xy = 0$ 이면 등호가 성립한다.

따라서, $xy \geq 0 \Rightarrow xy = |xy|$

(i), (ii)에서

$$xy = |xy| \Leftrightarrow xy \geq 0$$

7. 실수 a, b, c, x, y 에 대하여 항상 성립하는 부등식(절대부등식)을 다음 [보기] 중에서 고를 때, 옳은 표현의 개수는?

보기

(가) $x^2 - xy + y^2 \geq 0$

(나) $x^2 - x + 1 > 0$

(다) $|a + b| \leq |a| + |b|$

(라) $a + b \geq 2\sqrt{ab}$

(마) $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$

(바) $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$

① 6개

② 5개

③ 4개

④ 3개

⑤ 2개

해설

(라) $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ (단, $a = b$ 일때 등호성립)

(마) $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$ (단, $a = b = c$ 일때 등호성립)

8. 실수 x, y 에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

㉠ $|x| + |y| \geq |x + y|$

㉡ $|x + y| \geq |x - y|$

㉢ $|x - y| \geq |x| - |y|$

① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉡

④ ㉠, ㉢

⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠ $(|x| + |y|)^2 - |x + y|^2 = 2(|xy| - xy) \geq 0$

$\therefore |x| + |y| \geq |x + y|$

㉡ (반례) $x = 1, y = -1$ 일 때

$|1 + (-1)| = 0, |1 - (-1)| = 2$ 이므로

$|x + y| < |x - y|$

㉢ $|x - y|^2 - (|x| - |y|)^2 = 2(|xy| - xy) \geq 0$

$\therefore |x - y| \geq |x| - |y|$

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉢ 이다.