1. $a > b > 0$일 때, 다음 $2a+b$, $a+2b$의 대소를 비교하면?

① $2a+b < a+2b$
② $2a+b \leq a+2b$
③ $2a+b > a+2b$
④ $2a+b \geq a+2b$
⑤ $2a+b = a+2b$

해설
$(2a+b)-(a+2b) = a-b > 0$
$\therefore 2a+b > a+2b$

2. 세 수 $A = \sqrt{6} + \sqrt{7}$, $B = \sqrt{5} + 2\sqrt{2}$, $C = \sqrt{3} + \sqrt{10}$ 의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $A < B < C$ ② $A < C < B$ ③ $B < A < C$
④ $C < A < B$ ⑤ $C < B < A$

해설

$A > 0,\ B > 0,\ C > 0$ 이므로
A^2, B^2, C^2 의 대소를 비교한 것과 같다.
$A^2 = (\sqrt{6} + \sqrt{7})^2 = 13 + 2\sqrt{42}$
$B^2 = (\sqrt{5} + 2\sqrt{2})^2 = 13 + 2\sqrt{40}$
$C^2 = (\sqrt{3} + \sqrt{10})^2 = 13 + 2\sqrt{30}$
이므로 $A^2 > B^2 > C^2$ 이다.
따라서 $A > B > C$

3. $q > p > 1$인 실수 $p,\ q$에 대하여 $pq + p$와 $p^2 + q$의 대소를 비교하면?

① $pq + p < p^2 + q$　　② $pq + p \leq p^2 + q$

③ $pq + p > p^2 + q$　　④ $pq + p \geq p^2 + q$

⑤ $pq + p = p^2 + q$

해설

$$
\begin{aligned}
(pq + p) - (p^2 + q) &= pq - q - p^2 + p \\
&= q(p-1) - p(p-1) \\
&= (p-1)(q-p)
\end{aligned}
$$

$q > p > 1$이므로 $p - 1 > 0,\ q - p > 0$
따라서 $(p-1)(q-p) > 0$이므로
$pq + p > p^2 + q$

4. 다음 두 식의 대소를 바르게 비교한 것은?

$$A = 3x^2 - xy + 2y^2$$
$$B = 2x^2 + 3xy - 3y^2$$

① $A < B$　② $A \le B$　③ $A > B$
④ $A \ge B$　⑤ $A = B$

해설

$$\begin{aligned} A - B &= 3x^2 - xy + 2y^2 - (2x^2 + 3xy - 3y^2) \\ &= x^2 - 4xy + 5y^2 \\ &= x^2 - 4xy + 4y^2 + y^2 \\ &= (x - 2y)^2 + y^2 \ge 0 \end{aligned}$$

따라서 $A - B \ge 0$이므로 $A \ge B$

5. $a>0$ 일 때, $A=1+\frac{a}{2}$, $B=\sqrt{1+a}$ 의 대소를 바르게 비교한 것은?

① $A>B$　　② $A<B$　　③ $A\geq B$
④ $A\leq B$　　⑤ $A=B$

해설

$a>0$ 이므로 $1+\frac{a}{2}>0$, $\sqrt{1+a}>0$
제곱을 하여 비교하면
$$A^2-B^2=\left(1+\frac{a}{2}\right)^2-\left(\sqrt{1+a}\right)^2$$
$$=1+a+\frac{a^2}{4}-1-a$$
$$=\frac{a^2}{4}>0$$
따라서 $A^2>b^2$ 이므로 $A>B$ 이다.

6. 다음은 임의의 실수 a, b 에 대하여 $|a|+|b| \geq 0$, $|a+b| \geq 0$ 임을 증명하는 과정이다. [가]~[라] 에 알맞은 것을 바르게 나타낸 것은?

> $|a|+|b| \geq 0, ||a+b| \geq 0$ 이므로 $(|a|+|b|)^2$, $|a+b|^2$ 의 대소를 비교하면 된다.
> $(|a|+|b|)^2 - |a+b|^2$
> $= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2$
> $= a^2 + [\text{가}] + b^2 - (a^2 + [\text{나}] + b^2)$
> $= 2([\text{다}]) \geq 0$
> (단, 등호는 $[\text{라}] \geq 0$일때성립)

① 가 : $|ab|$, 나 : ab, 다 : $2|ab|-2ab$, 라 : ab

② 가 : $|ab|$, 나 : ab, 다 : $2|ab|-2ab$, 라 : $2ab$

③ 가 : $2|ab|$, 나 : $2ab$, 다 : $|ab|-ab$, 라 : ab

④ 가 : $2|ab|$, 나 : $2ab$, 다 : $2|ab|-2ab$, 라 : ab

⑤ 가 : $2|ab|$, 나 : $2ab$, 다 : $2|ab|-2ab$, 라 : $2ab$

해설

$(|a|+|b|)^2 - |a+b|^2$
$= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2$
$= a^2 + 2|ab| + b^2 - (a^2 + 2ab + b^2)$
$= 2(|ab| - ab) \geq 0$
(단, 등호는 $ab \geq 0$일때성립)

7. n이 자연수 일 때, $2^{10n}, 1000^n$ 의 대소를 비교하면?

① $2^{10n} < 1000^n$ ② $2^{10n} \leq 1000^n$ ③ $2^{10n} > 1000^n$

④ $2^{10n} \geq 1000^n$ ⑤ $2^{10n} = 1000^n$

해설

$2^{10n} > 0,\ 1000^n > 0$이고, n이 자연수이므로

$$\frac{2^{10n}}{1000^n} = \frac{(2^{10})^n}{1000^n} = \left(\frac{2^{10}}{1000}\right)^n = \left(\frac{1024}{1000}\right)^n > 1$$

$\therefore 2^{10n} > 1000^n$

8. 자연수 n 에 대하여 2^{4n}, 3^{3n} 의 대소를 바르게 비교한 것은?

① $2^{4n} < 3^{3n}$ ② $2^{4n} > 3^{3n}$ ③ $2^{4n} \leq 3^{3n}$
④ $2^{4n} \geq 3^{3n}$ ⑤ $2^{4n} = 3^{3n}$

해설

$$\frac{2^{4n}}{3^{3n}} = \left(\frac{2^4}{3^3}\right)^n = \left(\frac{16}{27}\right)^n < 1$$

$\therefore 2^{4n} < 3^{3n}$

9. 다음 중 세 수 3^{30}, 4^{20}, 12^{15} 의 대소 관계를 알맞게 나타낸 것은?

① $3^{30} > 4^{20} > 12^{15}$
② $4^{20} > 3^{30} > 12^{15}$
③ $12^{15} > 4^{20} > 3^{30}$
④ $3^{30} > 12^{15} > 4^{20}$
⑤ $12^{15} > 3^{30} > 4^{20}$

해설

$$\left(\frac{3^{1.5}}{4}\right)^{20} = \left(\frac{3\times 1.7}{4}\right)^{20} > 1 (3^{1.5} = 3\sqrt{3} \fallingdotseq 3\times 1.7)$$

따라서 3^{30} 이 4^{20} 보다 크다.

$$\left(\frac{3^2}{12}\right)^{15} = \left(\frac{3}{4}\right)^{15} < 1$$ 이 결과에서

12^{15} 이 3^{30} 보다 크다는 것을 알 수 있다.

10. 임의의 실수 a, b, c 에 대하여 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $|a| = -a$

② $a > b > 0$ 일 때, $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 이다.

③ $|a| \geq 0$, $|a| \geq a$, $|a| = |-a|$ 이다.

④ $|a+b+c| \leq |a| + |b| + |c|$

⑤ $|a-b| \geq |a| - |b|$

해설

① $|a| = a(a \geq 0)$
$-a(a < 0)$

② 참

③ 참

④ $(|a+b+c|)^2$
$= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$
$(|a| + |b| + |c|)^2$
$= a^2 + b^2 + c^2 + 2(|a||b| + |b||c| + |c||a|)$
$|a||b| \geq ab,\ |b||c| \geq bc,\ |c||a| \geq ca$
$\therefore |a+b+c| \leq |a| + |b| + |c|$

⑤ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(|a| - |b|)^2 = a^2 - 2|a||b| + b^2$ $(\because |a||b| \geq ab)$
$\therefore |a-b| \geq |a| - |b|$

11. 다음은 임의의 실수 x, y 에 대하여 $|x|+|y| \geq |x-y|$ 가 성립함을 증명하는 과정이다. 과정에서 ㉠ 에 알맞은 것은?

증명

$(|x|+|y|)^2-|x-y|^2$
$=|x|^2+2|x||y|+|y|^2-(x-y)^2$
$=2(|xy|+xy) \geq 0$
$\therefore (|x|+|y|)^2 \geq |x-y|^2$
그런데 $|x|+|y| \geq 0$, $|x-y| \geq 0$ 이므로
$|x|+|y| \geq |x-y|$ (단, 등호는 (㉠) 일 때, 성립)

① $xy>0$ ② $xy<0$ ③ $xy \geq 0$
④ $xy \leq 0$ ⑤ $xy=0$

해설

주어진 부등식에서
등호는 $|xy|+xy=0$ 일 때, 성립한다.
$|xy| \geq 0$ 이므로
$|xy|+xy=0$ 이려면 $xy \leq 0$
따라서 ㉠ 에 알맞은 것은 ④이다.

12. 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2 + bx + c > 0$이 항상 성립할 조건은 a[(가)]0, $b^2 - 4ac$[(나)]0이고, $ax^2 + bx + c \le 0$이 항상 성립할 조건은 a[(다)]0, $b^2 - 4ac$[(라)]0이다. 이 때, (가) ~ (라)의 [ ] 안에 들어갈 부등호를 순서대로 적으면?

① $>$, $<$, $<$, $\ge$ ② $>$, $>$, $<$, $\le$

③ $>$, $<$, $\le$, $<=$ ④ $>$, $>$, $\le$, $\le$

⑤ $>$, $<$, $<$, $\le$

해설

모든 실수 x에 대하여 이차부등식

(i) $ax^2 + bx + c > 0$이 항상 성립할 조건

$\Rightarrow a[>]0,\ b^2 - 4ac[<]0$

(ii) $ax^2 + bx + c \le 0$이 항상 성립할 조건 $\Rightarrow a[<]0,\ b^2 - 4ac[\le]0$

13. 다음은 $a,\ b,\ c$가 실수일 때 $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$ 를 증명한 것이다.[가], [나]에 들어갈 내용을 차례대로 나열한 것은?

$(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)$ $([가])\left(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}([나])0$ $a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)\geq 0$ (단, 등호는 $a=b=0$ 일 $a^2+b^2+c^2 \geq (ab+bc+ca)$ 때 성립)

① $\frac{1}{2},\ >$ ② $\frac{1}{2},\ \geq$ ③ $2,\ >$ ④ $2,\ \geq$ ⑤ $2,\ =$

해설

$(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)$
두식의차를변형하면
$\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\geq 0$
$\because a,b,c$ 가 실수이므로 $(a-b)^2\geq 0,$
$(b-c)^2\geq 0, (c-a)^2\geq 0$
$a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)\geq 0$ (단, 등호는 $a=b=c$ 일 때
$a^2+b^2+c^2\geq (ab+bc+ca)$
성립)

14. x, y 가 실수일 때, 다음 중 절대부등식이 아닌 것을 모두 고른 것은?

㉠ $x+1>0$	㉡ $x^2+xy+y^2 \geq 0$
㉢ $\lvert x\rvert+\lvert y\rvert \geq \lvert x-y\rvert$	㉣ $\lvert x+y\rvert \geq \lvert x-y\rvert$

① ㉠　② ㉠, ㉢　③ ㉠, ㉣
④ ㉡, ㉣　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $x>-1$ 일 때만 성립한다.

㉡ $x^2+xy+y^2=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2 \geq 0$

(단, 등호는 $x=y=0$ 일 때 성립)

㉢ $(\lvert x\rvert+\lvert y\rvert)^2-\lvert x-y\rvert^2$

$=\lvert x\rvert^2+2\lvert x\rvert\lvert y\rvert+\lvert y\rvert^2-(x-y)^2$

$=2(\lvert xy\rvert+xy) \geq 0$

$\therefore (\lvert x\rvert+\lvert y\rvert)^2 \geq \lvert x-y\rvert^2$

(단, 등호는 $xy \leq 0$ 일 때 성립)

㉣ (반례) $x=2, y=-3$ 일 때

$\lvert 2+(-3)\rvert=1, \lvert 2-(-3)\rvert=5$ 이므로

$\lvert x+y\rvert<\lvert x-y\rvert$

따라서 절대부등식이 아닌 것은 ㉠, ㉣ 이다.

15. 다음은 "실수를 계수로 갖는 세 개의 이차방정식 $ax^2+2bx+c=0$, $bx^2+2cx+a=0$, $cx^2+2ax+b=0$ 중 적어도 하나는 실근을 갖는다"는 것을 증명한 것이다. 위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞는 부등호를 차례대로 쓰면?

증명

주어진 방정식이 모두 허근을 갖는다고 가정하면
b^2-ac (가) 0 , c^2-ab (가) 0 , a^2-bc (가) 0
세 식을 같은 변끼리 더하면
$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac$ (나) 0
좌변을 변형하면
$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac$
$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$ (나) $0 \cdots$ ㉠
그런데 $a,\ b,\ c$ 는 실수이므로
$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$ (다) $0 \cdots$ ㉡
따라서, ㉡은 ㉠에 모순이므로 세 방정식 중 적어도 하나는 실근을 갖는다.

① $<,\ <,\ \geq$ ② $<,\ <,\ >$ ③ $<,\ >,\ <$
④ $\geq,\ \geq,\ \leq$ ⑤ $\geq,\ \leq,\ \geq$

해설

주어진 방정식이 모두 허근을 갖는다면
$b^2-ac<0,\ c^2-ab<0,\ a^2-bc<0$ (가정)
세 식을 같은 변끼리 더하면
$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac<0$
좌변을 변형하면
$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac$
$=\frac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}<0 \cdots$ ㉠
그런데 $a,\ b,\ c$ 는 실수이므로
$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0 \cdots$ ㉡
따라서, ㉡은 ㉠에 모순이므로 세 방정식 중 적어도 하나는 실근을 갖는다.