

1. 집합 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 의 부분집합 중에서 홀수가 하나만 속하는 것을 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ 이라 하고, $A_k (k = 1, 2, \dots, n)$ 의 원소의 합을 S_k 라고 할 때, $S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n$ 의 값은?

- ① 216 ② 240 ③ 672 ④ 696 ⑤ 728

해설

집합 S 에 홀수 1, 3, 5가 있으므로 홀수를 하나만 포함하는 부분집합의 개수를 구할 때, 1을 포함하고 3, 5를 포함하지 않는 부분집합의 개수는

$$2^{6-3} = 8 \text{ (개)} \dots \textcircled{\text{A}}$$

3을 포함하고 1, 5를 포함하지 않는 부분집합의 개수는

$$2^{6-3} = 8 \text{ (개)} \dots \textcircled{\text{B}}$$

5를 포함하고 1, 3을 포함하지 않는 부분집합의 개수는

$$2^{6-3} = 8 \text{ (개)} \dots \textcircled{\text{C}}$$

이므로 모두 24개이다. 이 24개의 부분집합의 열을 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{24}$ 라 하면 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{24}$ 에는 S 의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6이 각각 몇 개씩 들어갈까? 우선 1을 포함하고 3, 5를 포함하지 않는 부분집합의 개수가 8개이므로 1이 8번 들어가는 것은 분명하다. 그러면 3, 5는 들어가지 않으니 문제 삼지 말고 2, 4, 6은 몇 번 들어갈까?

구체적으로 나열하면 $\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 6\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 4, 6\}, \{1, 2, 4, 6\}$ 이 되어 2, 4, 6은 각각 4번씩 들어간다. 따라서 $\textcircled{\text{A}}$ 의 8개의 집합 안에는 1이 8번, 2, 4, 6이 각각 4번씩 $\textcircled{\text{B}}$ 의 8개의 집합 안에는 3이 8번, 2, 4, 6이 각각 4번씩 $\textcircled{\text{C}}$ 의 8개의 집합 안에는 5가 8번, 2, 4, 6이 각각 4번씩 들어가므로 $S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{24} = 8(1 + 3 + 5) + 12(2 + 4 + 6) = 216$ 그런데, 여기서 원소의 총합에 대한 규칙성을 발견해 보면 2, 4, 6이 각각 4번씩 나오는데 그 이유를 알아보자. 1을 반드시 포함하고 3, 5를 포함하지 않는 부분집합 중에서 2를 반드시 포함하는 부분집합의 개수는 1, 2, 3, 5를 제외한 부분집합의 개수와 같으므로 $2^{6-4} = 4$ (개)이다.