1. 점 $A(6,\ 0)$와 원 $x^2+y^2+6x-6y+9=0$ 위의 점 P를 잇는 선분 AP를 $1\ :\ 2$로 내분하는 점 Q의 자취의 방정식을 구하면?

① $(x-2)^2+(y-1)^2=1$　② $(x-3)^2+(y-1)^2=2$

③ $(x-3)^2+(y-2)^2=1$　④ $(x-3)^2+(y-1)^2=1$

⑤ $(x+3)^2+(y-1)^2=1$

해설

원$(x+3)^2+(y-3)^2=3^2$

$\mathrm{P}(\alpha,\ \beta)$, $\mathrm{Q}(x,\ y)$라 하면

$\overline{\mathrm{AP}}$를 $1:2$로 내분한 점

$\mathrm{Q}(x,\ y)$는 $\mathrm{Q}\left(\dfrac{\alpha+12}{3},\ \dfrac{\beta}{3}\right)$

$\therefore\ x=\dfrac{\alpha+12}{3},\ y=\dfrac{\beta}{3}\cdots\cdots①$

그런데 점$\mathrm{P}(\alpha,\ \beta)$는 원 위의 점이므로

$(\alpha+3)^2+(\beta-3)^2=9\cdots\cdots②$

①, ②에서 구하는 자취는 $(x-3)^2+(y-1)^2=1$

2. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(1,-4), \mathrm{B}(5,8)$ 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}} \perp \overline{\mathrm{BP}}$ 를 만족하는 점 P 의 자취의 방정식은?

① $(x-3)^2+(y-2)^2=160$ ② $(x-3)^2+(y+2)^2=160$

③ $(x-2)^2+(y-3)^2=40$ ④ $(x+3)^2+(y+2)^2=40$

⑤ $(x-3)^2+(y-2)^2=40$

해설

$\overline{\mathrm{AP}} \perp \overline{\mathrm{BP}}$ 를 만족하는 점 P 의 자취는
두 점 $\mathrm{A}(1,-4), \mathrm{B}(5,8)$ 을 잇는
선분 AB 를 지름으로 하는 원이므로
이 원의 중심을 (a,b) 라 하면

$a=\dfrac{1+5}{2}=3,\ b=\dfrac{-4+8}{2}=2$

또, 반지름의 길이 r 는

$r=\dfrac{\sqrt{(5-1)^2+\{8-(-4)\}^2}}{2}=2\sqrt{10}$

따라서, 점 P 의 자취의 방정식은
$(x-3)^2+(y-2)^2=40$

3. $z = x + yi(x,\ y$ 는 실수$)$ 이고,

$\dfrac{z}{1+z^2}$ 가 실수일 때, 점 $(x,\ y)$ 가 그리는 자취의 길이를 구하면?

(단, $xy \neq 0$)

① π ② 2π ③ 3π ④ 4π ⑤ 5π

해설

$$\frac{z}{1+z^2} = \frac{x+yi}{1+(x+yi)^2}$$

$$= \frac{x+yi}{1+x^2-y^2+2xyi}$$

$$= \frac{x+yi}{(1+x^2-y^2)+(2xyi)} \cdot \frac{(1+x^2-y^2)-(2xyi)}{(1+x^2-y^2)-(2xyi)} \quad \cdots\cdots \text{①}$$

$\dfrac{z}{1+z^2}$ 가 실수이려면 ①의 분모가 실수이므로

분자의 허수부가 0 이어야 한다.

$\therefore$ (분자의 허수부)$= 0$ 에서

$y(1+x^2-y^2) - 2x^2y = 0$

$\therefore y(1-x^2-y^2) = 0$

$\therefore x^2+y^2 = 1$

($\because$ $xy \neq 0$ 으로부터 $y \neq 0$)

따라서 점 $(x,\ y)$ 의 자취는 중심이 $(0,\ 0)$, 반지름이 1 인 원이다.

$\therefore$ 자취의 길이는 2π

4. 두 원 $x^2+y^2=1, x^2+y^2-8x+6y+a=0$ 이 서로 외접할 때, 상수 a 의 값은?

① 7　② 9　③ 11　④ 13　⑤ 15

해설

$x^2+y^2=1, (x-4)^2+(y+3)^2=25-a$
두 원이 외접하면 중심사이 거리와 반지름의 합이 같다.

$\Rightarrow \quad 1+\sqrt{25-a}=\sqrt{4^2+3^2}$

$\Rightarrow \quad a=9$

5. 두 원 $x^2+(y-2)^2=4, (x-a)^2+(y-1)^2=1$에 대한 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $a=\sqrt{3}$이면 두 원은 서로 다른 원의 내부에 있다.

㉡ $a=0$이면 두 원은 서로 접한다.

㉢ a의 값에 관계없이 한 원이 다른 원의 내부에 놓일 수 없다.

① ㉠ ② ㉢ ③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

두 원 $x^2+(y-2)^2=4, (x-a)^2+(y-1)^2=1$의 중심 사이의 거리는 $\sqrt{a^2+1}$이고 반지름의 길이는 각각 $2, 1$이다.

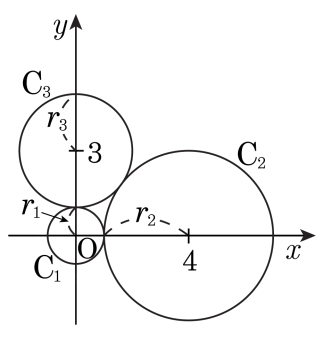
㉠ $a=\sqrt{3}$이면 $2-1<\sqrt{a^2+1}<2+1$이므로 두 원은 서로 다른 두 점에서 만난다. (거짓)

㉡ $a=0$이면 $\sqrt{a^2+1}=2-1$이므로 두 원은 서로 내접한다. (참)

㉢ $\sqrt{a^2+1}\geq 1$이므로 $\sqrt{a^2+1}<2-1$이 될 수 없다. 즉, 한 원이 다른 원의 내부에 놓을 수 없다. (참)

따라서, 옳은 것은 ㉡, ㉢이다.

6. 좌표평면 위에 중심이 O(0, 0)이고 반지름의 길이가 r_1인 원 C_1, 중심이 A(4, 0)이고 반지름의 길이가 r_2인 원 C_2, 중심이 B(0, 3)이고 반지름의 길이가 r_3인 원 C_3가 서로 외접하고 있을 때, 순서쌍(r_1, r_2, r_3)는?



① $(1, 2, 3)$ ② $(1, 3, 2)$ ③ $(2, 3, 1)$

④ $(3, 1, 2)$ ⑤ $(3, 2, 1)$

해설

두 원이 서로 외접할 때, 중심 거리는 반지름의 길이의 합과 같으므로

$r_1 + r_2 = 4 \cdots\cdots$㉠

$r_2 + r_3 = 5 \cdots\cdots$㉡

$r_3 + r_1 = 3 \cdots\cdots$㉢

㉠ + ㉡ + ㉢에서 $2(r_1 + r_2 + r_3) = 12$

$\therefore\ r_1 + r_2 + r_3 = 6 \cdots\cdots$㉣

㉠, ㉡, ㉢, ㉣에서

$r_3 = 2,\ r_1 = 1,\ r_2 = 3$

$\therefore\ (r_1, r_2, r_3) = (1, 3, 2)$

7. 두 원 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$, $(x-5)^2+y^2=4$의 공통내접선의 길이는?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

해설

두 원의 중심거리는

$\overline{OO'}=\sqrt{(5-1)^2+(0-1)^2}=\sqrt{17}$

$\overline{O'H}=\overline{O'B}+\overline{BH}=\overline{O'B}+\overline{OA}=2+1=3$

이므로 $\overline{AB}=\overline{OH}=\sqrt{\overline{OO'}^2-\overline{O'H}^2}$

$=\sqrt{17-3^2}=2\sqrt{2}$

따라서, 공통내접선의 길이는 $2\sqrt{2}$ 이다.

8. 두 원 $x^2+y^2=36$, $(x-12)^2+y^2=9$ 의 공통내접선의 길이는?

① $2\sqrt{5}$ ② $2\sqrt{6}$ ③ $2\sqrt{7}$ ④ $3\sqrt{6}$ ⑤ $3\sqrt{7}$

해설

두 원의 중심 사이의 거리는 12
내접선의 길이를 L 이라 하면,
$L^2=12^2-9^2$
$\therefore\ L=3\sqrt{7}$

9. 두 원 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$, $(x-5)^2+y^2=4$ 의 공통내접선의 길이는?

① $\sqrt{6}$ ② $\sqrt{7}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

해설

두 원의 중심거리는
$\overline{OO'}=\sqrt{(5-1)^2+(0-1)^2}=\sqrt{17}$
$\overline{O'H}=\overline{O'B}+\overline{BH}=\overline{O'B}+\overline{OA}=2+1=3$ 이므로
$\overline{AB}=\overline{OH}=\sqrt{\overline{OO'}^2-\overline{O'H}^2}=\sqrt{17-3^2}$
$=2\sqrt{2}$
따라서 공통내접선의 길이는 $2\sqrt{2}$ 이다.

10. 원 $x^2+(y-5)^2=4$가 원 $(x-5)^2+y^2=9$의 외부에 있을 때, 두 원 사이의 최단거리는?

① 2　② 3　③ 5

④ $5\sqrt{2}-5$　⑤ $5\sqrt{2}-13$

해설

두 원의 중심의 좌표가 각각 $(0,5)$, $(5,0)$이므로 중심거리는 $\sqrt{5^2+(-5)^2}=5\sqrt{2}$
두 원의 반지름은 각각 2, 3이므로 두 원의 최단거리는 $5\sqrt{2}-2-3=5\sqrt{2}-5$

11. 원 $x^2+(y-4)^2=4$가 원 $(x-4)^2+y^2=9$의 외부에 있을 때, 두 원 사이의 최단거리는?

① 2　② 3　③ 5

④ $4\sqrt{2}-5$　⑤ $4\sqrt{2}-6$

해설

두 원의 중심의 좌표가 각각 $(0,4)$, $(4,0)$이므로 중심거리는 $\sqrt{4^2+(-4)^2}=4\sqrt{2}$
두 원의 반지름은 각각 2, 3이므로 두 원의 최단거리는 $4\sqrt{2}-2-3=4\sqrt{2}-5$

12. 점 $\mathrm{P}(a, 0)$에서 원 $(x-3)^2+(y-2)^2=4$에 그은 접선의 길이가 4일 때, 점 P의 좌표를 모두 구하면?

① $(1,0)$, $(7,0)$ ② $(-1,0)$, $(7,0)$ ③ $(1,0)$, $(-7,0)$
④ $(-1,0)$, $(5,0)$ ⑤ $(1,0)$, $(-5,0)$

해설

원의 중심을 $\mathrm{C}(3,2)$, 접점을 Q라 하면
$\overline{\mathrm{CP}}=\sqrt{(a-3)^2+2^2}$
CPQ는 직각삼각형이므로
$(a-3)^2+4=2^2+4^2$
$a^2-6a-7=0$
$(a+1)(a-7)=0$
$\therefore a=-1$ 또는 $a=7$
따라서 구하는 점 P의 좌표는 $(-1,0)$, $(7,0)$이다.

13. 원 $(x-2)^2+y^2=4$ 와 함수 $\sqrt{3}y=|x-2|$ 의 그래프가 만나는 두 점을 A, B 라 하자. 이때, 작은 활꼴 A, B 의 넓이는?

① $\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$ ② $\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$ ③ $2\pi-\sqrt{3}$
④ $\frac{4}{3}\pi+\sqrt{3}$ ⑤ $2\pi+\sqrt{3}$

해설

$\sqrt{3}y=|x-2|$ 의 그래프는

$x<2$: $\sqrt{3}y=-x+2$

$\therefore\ y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{2}{\sqrt{3}}$

$x\geq 2$: $\sqrt{3}y=x-2$

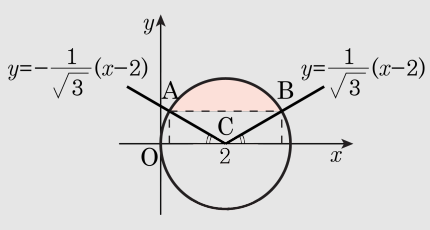
$\therefore\ y=\frac{1}{\sqrt{3}}x-\frac{2}{\sqrt{3}}$

이고 $\angle ACB=\frac{2}{3}\pi$ 이므로

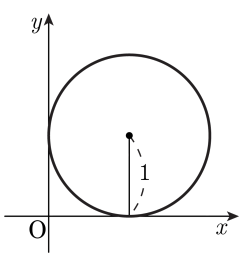
색칠된 부분의 넓이 S 는

$S=\frac{1}{2}\times 2^2\times\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{2}\times 2^2\times\sin\frac{2}{3}\pi$

$=\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$



14. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원이 x 축, y 축에 동시에 접하고 있다. 이 원 위의 점 $(x,\ y)$에 대하여 $\dfrac{y+2}{x+1}$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\dfrac{y+2}{x+1} = k$라 하면 직선 $y+2 = k(x+1)$ 은
k 값에 관계없이 점 $(-1, -2)$를 지난다.
이 때, 기울기 k 는 직선이 원래 접할 때 최댓값과 최솟값을 갖는다.

$$\frac{|k-1+k-2|}{\sqrt{k^2+1}} = 1$$

$$|2k-3| = \sqrt{k^2+1}$$

$$4k^2 - 12k + 9 = k^2 + 1$$

$$3k^2 - 12k + 8 = 0$$

최댓값과 최솟값은 이 방정식의 해이므로
근과 계수와의 관계에 의해 합은 4이다.

15. 곡선 $(x-y+1)+m(x^2+y^2-1)=0$ 에 대한 다음 설명 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, m 은 임의의 상수)

(Ⅰ) 항상 $(0,\ 1)$과 $(-1,\ 0)$을 지난다. (Ⅱ) $x-y+1=0$과 $x^2+y^2=1$의 교점을 지나는 모든 원을 표시 할수 있다. (Ⅲ) 위의 곡선으로 표시 할 수 있는 유일한 직선은 $y=x+1$이다.

① Ⅰ　② Ⅱ　③ Ⅲ

④ Ⅰ, Ⅱ　⑤ Ⅰ, Ⅲ

해설

준 식은 $x^2+y^2-1=0$ 과 $x-y+1=0$ 의
교점을 지나는 도형의 방정식이다.
$m=0$ 일 때만 $x-y+1=0$ 이 되어
직선을 나타내며, 그 외에는 항상 원을 나타낸다.
단, m 의 값이 어떤 실수로 주어져도
$x^2+y^2-1=0$ 인 원은 나타낼 수 없다.

16. 평행이동 $f : (x, y) \to (x-2, y+1)$ 에 의하여 직선 $2x+y+5=0$ 이 이동한 직선의 방정식을 구하면?

① $2x+y+1=0$ ② $2x+y+2=0$ ③ $2x+y+6=0$

④ $2x+y+8=0$ ⑤ $2x+y+9=0$

해설

$x' = x-2$, $y' = y+1$ 이라 하자.
x, y 를 원래 식에 대입하면,
$2(x'+2)+(y'-1)+5=0$
$\Rightarrow \quad 2x'+y'+8=0$
$\Rightarrow \quad 2x+y+8=0$

17. 다음 중 직선 $y = -3x$ 의 그래프를 y 축의 음의 방향으로 2 만큼 평행이동시킨 직선의 식은?

① $y = -3x - 2$ ② $y = 3x + 2$ ③ $y = -3x + 2$

④ $y = -3x + 4$ ⑤ $y = 3x - 4$

해설

직선 $y = -3x$ 의 그래프를 y 축의 음의 방향으로
2 만큼 평행이동 시킨 직선은
$y - (-2) = -3x$
$\therefore y = -3x - 2$

18. 직선 $3x+y-5=0$을 x축 방향으로 1만큼, y축 방향으로 n만큼 평행이동하면 직선 $3x+y-1=0$이 된다. 이 때, n의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -7

해설

x축 방향으로 1, y축 방향으로 n만큼 평행이동하므로
직선 $3x+y-5=0$에 x 대신 $x-1$, y 대신 $y-n$을 대입하면
$3(x-1)+(y-n)-5=0$
$3x+y-n-8=0$ ····· ㉠
㉠이 $3x+y-1=0$과 일치하므로 $-n-8=-1$ $\therefore$ $n=-7$

19. 직선 $y=ax+b$ 를 평행 이동 $g : (x, y) \rightarrow (x+2, y-3)$ 에 의하여 이동하였더니, 직선 $y=3x+4$ 와 y 축 위의 점에서 직교하였다. $a+b$ 의 값은 ?

① 6 ② $\frac{19}{3}$ ③ $\frac{20}{3}$ ④ 7 ⑤ 8

해설

직선이 g 에 의하여 평행이동하면

$y+3=a(x-2)+b$ 에서 $y=ax-2a+b-3 \cdots$ ①

① 이 직선 $y=3x+4$ 와 y 축 위의 점에서

직교하므로 $3a=-1$

$\therefore\ a=-\frac{1}{3}$

또, y 축 위에서 직교하므로 y 절편이 같다.

$-2a+b-3=4$ 에서 $\frac{2}{3}+b-3=4$

$\therefore\ b=4+\frac{7}{3}=\frac{19}{3}$

$\therefore\ a+b=\frac{18}{3}=6$

20. 평행이동 $(x,\ y) \to (x+m,\ y+n)$ 에 의하여 점 $\mathrm{A}\,(1,\ 2)$ 가 점 B 로 옮겨질 때, $\overline{\mathrm{AB}} = 4\sqrt{2}$ 이고 점 B 에서 직선 $x+y-3=0$ 에 이르는 거리가 $3\sqrt{2}$ 이다. 이때, mn 의 값은?

① -4 ② -2 ③ 2 ④ 4 ⑤ 6

해설

점 $\mathrm{A}\,(1,2)$ 를 x 축 방향으로 m 만큼,
y축 방향으로 n 만큼 평행이동한 점 B 는
$\mathrm{B}\,(1+m, 2+n)$ 이고,
선분 AB 의 길이가 $4\sqrt{2}$ 이므로
$\sqrt{m^2+n^2} = 4\sqrt{2} \quad \therefore m^2+n^2 = 32$
또한, 점 B 에서 직선 $x+y-3=0$ 에
이르는 거리가 $3\sqrt{2}$ 이므로

$$\frac{|1+m+2+n-3|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 3\sqrt{2}$$

$\therefore |m+n| = 6$
이 식의 양변을 제곱하면
$m^2+2mn+n^2 = 36$
이 때, $m^2+n^2 = 32$ 이므로
$2mn = 36-32 = 4 \quad \therefore mn = 2$

21. 원 $x^2+y^2=1$ 을 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동하면 직선 $y=x+3$ 과 접하게 될 때, 양수 m 의 값을 구하면?

① $2\sqrt{2}+1$ ② $\sqrt{2}+1$ ③ $\sqrt{2}$

④ $\sqrt{2}-1$ ⑤ $2\sqrt{2}-1$

해설

$x^2+y^2=1$ 을 x 축의 방향으로 m 만큼,
y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동하면
$(x-m)^2+(y-2)^2=1 \cdots\cdots$ ㉠
㉠이 직선 $x-y+3=0$ 과 접하므로
점 $(m,\ 2)$ 와 직선 $x-y+3=0$ 사이의 거리가 1 이다.

$$\frac{|m-2+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=1$$

이것을 풀면 $m=-1\pm\sqrt{2}$
$\therefore m=-1+\sqrt{2}\ (\because m>0)$

22. 두 원 $(x-a)^2+(y-2)^2=9$, $(x-1)^2+(y+a)^2=1$이 직교하도록 하는 a의 값의 곱을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $-\frac{5}{2}$

해설

두 원의 중심이 각각 $(a,\ 2)$, $(1,\ -a)$이므로
두 원의 중심 사이의 거리는 $\sqrt{(a-1)^2+(2+a)^2}$이다.
두 원의 반지름은 각각 3, 1이므로
직교하기 위한 조건은
$(a-1)^2+(2+a)^2=3^2+1^2$
$\therefore\ 2a^2+2a-5=0$
근과 계수와의 관계로부터 두 근의 곱은 $-\frac{5}{2}$

23. 두 원 $(x-a)^2+(y-2)^2=9$, $(x-1)^2+(y+a)^2=1$이 직교할 때 a의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

두 원의 중심이 각각 $(a,\ 2)$, $(1,\ -a)$이므로
두 원의 중심 사이의 거리는 $\sqrt{(a-1)^2+(2+a)^2}$이다.
두 원의 반지름은 각각 3, 1이므로
직교하기 위한 조건은
$(a-1)^2+(2+a)^2=3^2+1^2$
$\therefore\ 2a^2+2a-5=0$
근과 계수와의 관계로부터 두 근의 합은 -1

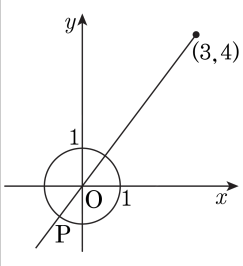
24. 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$ 에 대하여 $\sqrt{(a-3)^2+(b-4)^2}$ 의 최댓값은?

① 4　② 5　③ 6

④ $1+\sqrt{5}$　⑤ $2(1+\sqrt{5})$

해설

$\sqrt{(a-3)^2+(b-4)^2}$ 은 두 점 $(a,\ b)$, $(3,4)$ 사이의 거리이고 점 $(a,\ b)$ 는 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로 $\sqrt{(a-3)^2+(b-4)^2}$ 의 값이 최대인 경우는 점 P 의 위치가 그림과 같을 때이다. 원의 중심 $(0,0)$ 과 $(3,4)$ 의 거리는 5 이므로 최댓값은 $5+1=6$



25. 원 $x^2+y^2-2x+4y-3=0$ 위의 점에서 직선 $x-y+3=0$ 에 이르는 거리의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $\sqrt{2}$

해설

원 $x^2+y^2-2x+4y-3=0$ 을
표준형으로 고치면 $(x-1)^2+(y+2)^2=8$ 이므로
중심이 $(1,\ -2)$ 이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 원이다.
원의 중심 $(1,\ -2)$ 에서 직선 $x-y+3=0$ 에 이르는 거리 d 는

$$\frac{|1-(-2)+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$$

따라서 원 위의 점에서 직선 $x-y+3=0$ 에
이르는 거리의 최솟값은
$d-$ (반지름의 길이)$=3\sqrt{2}-2\sqrt{2}=\sqrt{2}$

26. 두 원 $(x+1)^2+(y+1)^2=2$, $x^2+(y-6)^2=8$ 사이의 최단거리를 d 라 할 때, d^2 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

두 원 사이의 최단 거리는 중심거리에서
두 원의 반지름의 길이를 뺀 것과 같으므로

$d=\sqrt{\{0-(-1)\}^2+\{6-(-1)\}^2}-\sqrt{2}-2\sqrt{2}$

$=5\sqrt{2}-\sqrt{2}-2\sqrt{2}$

$=2\sqrt{2}$

$\therefore\ d^2=8$