

1. 전체집합 $U = \{x|x \text{는 짝수}\}$ 의 부분집합 A 는 5 보다 작은 자연수로만 이루어져 있다. 가능한 집합 A 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 3 개

▷ 정답 : 3 개

해설

집합 A 는 5 보다 작은 짝수 2, 4 로만 이루어져 있다.
따라서 가능한 집합 A 는 $\{2\}$, $\{4\}$, $\{2, 4\}$ 의 3 개이다.

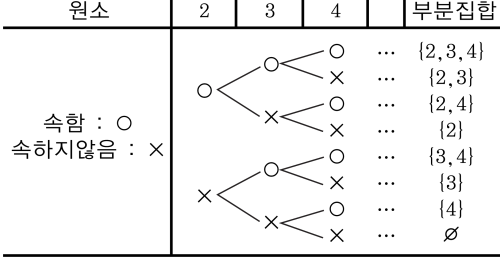
2. 집합 $A = \{x|x \text{는 } 20 \text{ 미만의 } 8 \text{의 배수}\}$, $B = \{x|x \text{는 } 8 \text{ 미만의 } 20 \text{의 약수}\}$ 일 때, $n(A) = a$, 집합 B 의 부분집합의 개수를 b 라 할 때, $b - a$ 의 값을 골라라.

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

해설

$A = \{8, 16\}$, $B = \{1, 2, 4, 5\}$ 이므로 $a = n(A) = 2$ 이고,
 $n(B) = 4$ 이므로, $b = (B \text{의 부분집합의 개수}) = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ 이다.
 $\therefore b - a = 16 - 2 = 14$

3. 다음은 집합 {2, 3, 4}의 부분집합을 구하는 과정이다.
원소 2, 3, 4 중에서 원소를 골라 부분집합을 만들 때, 각 원소는 부분집합에 속하거나, 속하지 않는 2가지 경우가 생기므로 다음 그림과 같이 구할 수 있다.



이와 같은 방법으로 집합 {2, 3, 4, 5}의 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 16 개

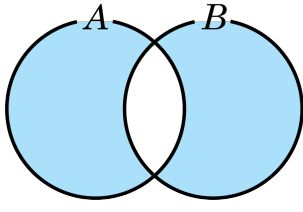
해설

집합 {2, 3, 4, 5}의 부분집합을 모두 구해보면 다음과 같다.

원소	2	3	4	5		부분집합
속함 : ○ 속하지않음 : ×	○	○	○	○	...	{2, 3, 4, 5}
				×	...	{2, 3, 4}
			×	○	...	{2, 3, 5}
				×	...	{2, 3}
		×	○	○	...	{2, 4, 5}
				×	...	{2, 4}
			×	○	...	{2, 5}
				×	...	{2}
	×	○	○	○	...	{3, 4, 5}
				×	...	{3, 4}
			×	○	...	{3, 5}
				×	...	{3}
		×	○	○	...	{4, 5}
				×	...	{4}
			×	○	...	{5}
				×	...	∅

따라서 부분집합의 개수는 16 개 이다.

4. 두 집합 $A = \{1, 2, 4, 6, 9, 10, 13\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 미만의 짝수}\}$ 에 대하여 다음 벤 다이어그램에서 색칠한 부분의 모든 원소의 합을 구하여라.



▶ 답 :

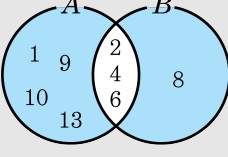
▷ 정답 : 41

해설

조건제시법을 원소나열법으로 고쳐보면

$B = \{2, 4, 6, 8\}$ 이다.

벤 다이어그램을 그려보면 다음과 같다.

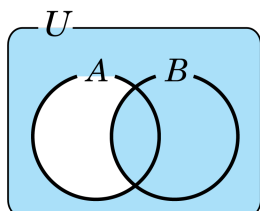


색칠한 부분의 원소는 $\{1, 8, 9, 10, 13\}$ 이다.

따라서 모든 원소의 합은

$1 + 8 + 9 + 10 + 13 = 41$ 이다.

5. 다음 벤 다이어그램에서 색칠한 부분이 나타내는 집합은?



- ① $A^c \cap B^c$ ② $(A \cap B)^c$ ③ $B \cup A^c$
④ $A^c \cap B^c$ ⑤ $B^c - A$

해설

주어진 벤 다이어그램의 색칠한 부분은 ③ $B \cup A^c$ 이다.

6. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A \cup B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$,
 $A - B = \{1, 5\}$, $A \cap B = \{3, 7\}$, $(A \cup B)^c = \{2, 4, 6, 8\}$ 일 때, 다음 중
옳지 않은 것은?
- ① $n(U) = 9$
- ② 전체집합을 조건제시법으로 나타내면
 $U = \{x|x \text{는 } 9\text{미만의 자연수}\}$ 이다.
- ③ $B - A = \{9\}$
- ④ $n(A^c \cap B^c) = 4$
- ⑤ $(A \cup B) - (A \cap B) = \{1, 5, 9\}$

해설

$(A \cup B) \cup (A \cup B)^c = U$ 이므로
전체집합을 조건제시법으로 나타내면
 $U = \{x|x \text{는 } 9\text{이하의 자연수}\}$ 또는
 $U = \{x|x \text{는 } 10\text{미만의 자연수}\}$ 이다.

7. 다음 중 거짓인 명제를 모두 고른 것은?

㉠ $xy > x + y > 4$ 이면 $x > 2, y > 2$ 이다.

㉡ $x > 1$ 이면 $x^2 > 1$ 이다.

㉢ $x + y = 0$ 이면 $x = 0$ 이고 $y = 0$ 이다.

㉣ $x = 1$ 이면 $x^2 = 1$ 이다.

㉤ $2x + 4 > 0$ 이면 $x > -2$ 이다.

해설

㉠ (반례) $x = 1.5, y = 10$ 이면 $xy > x + y > 4$ 이지만 $x < 2, y > 2$ 이므로 거짓이다.

㉢ (반례) $x = -1, y = 1$ 이면 $x + y = 0$ 이지만 $x \neq 0, y \neq 0$ 이므로 거짓이다.

8. 다음 중 참인 명제는?

- ① 직사각형은 마름모이다.
- ② 평행사변형은 직사각형이다.
- ③ 사다리꼴이면 정사각형이다.
- ④ 정삼각형이면 이등변삼각형이다.
- ⑤ 삼각형 ABC 가 직각삼각형이면 $\angle A = 90^\circ$ 이다.

해설

- ④ 이등변삼각형의 집합은 정삼각형의 집합을 포함하고 있으므로 참이다.

9. 다음 다섯 개의 명제 중 참인 명제의 개수는? (단, a, b, c 는 실수)

- ㉠

$|a| + |b| = 0 \leftrightarrow ab = 0$
- ㉡

$a < b$ 이면 $ac < bc$ 이다.
- ㉢

$a < b$ 이면 $a^2 < b^2$ 이다.
- ㉣

$a + b\sqrt{3} = 0$ 이면 $a = 0$ 그리고 $b = 0$
- ㉤

$a < b$ 이면 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

①

없다. ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

㉠

$|a| + |b| = 0 \leftrightarrow a = b = 0 \leftrightarrow ab = 0$

㉡

$c \leq 0$ 인 경우 성립하지 않는다.

㉢

반례 : $a = -1, b = 0$

㉣

반례 : $a = \sqrt{3}, b = -1$ (a, b 가 유리수일 때 명제가 성립한다.)

㉤

반례 : $a = -1, b = 1$ (a, b 가 같은 부호일 때 성립한다.)

10. 실수 x, y 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

- ㉠ $x > y$ 이면, $x^2 > y^2$ 이다.

㉡ $x^2 + y^2 \geq xy$

㉢ $x > y$ 이면 $x^3 > y^3$ 이다.

- ① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠. (반례) $x = 2, y = -3$ 일 때, $4 < 9 \quad \therefore$ 거짓

㉡. $x^2 + y^2 - xy = \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0$
 $\therefore x^2 + y^2 \geq xy$
 $\therefore$ 참

㉢. $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$
 $x - y > 0, x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 > 0$
 $\therefore x^3 - y^3 > 0, x^3 > y^3$
 $\therefore$ 참

11. 다음 [보기] 중에 x 에 대한 절대부등식인 것을 모두 고른 것은? (단, x 는 실수이다.)

보기

㉠ $x + 1 > 0$

㉡ $x^2 - 2x + 1 \geq 0$

㉢ $x^2 < x + 12$

㉣ $x^2 + 1 > x$

① ㉡

② ㉠, ㉢

③ ㉡, ㉣

④ ㉡, ㉣

⑤ ㉠, ㉡, ㉣

해설

㉠ $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$

㉡ $x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 \geq 0$
 $\Leftrightarrow x$ 는 모든 실수(절대부등식)

㉢ $x^2 < x + 12 \Leftrightarrow x^2 - x - 12 < 0$
 $\Leftrightarrow (x + 3)(x - 4) < 0$
 $\Leftrightarrow -3 < x < 4$

㉣ $x^2 + 1 > x \Leftrightarrow x^2 - x + 1 > 0$
 $\Leftrightarrow \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + 1 - \frac{1}{4} > 0$
 $\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$
 $\Leftrightarrow x$ 는 모든 실수(절대부등식)

12. 다음 중 절대부등식 $a^2 + ab + b^2 \geq 0$ 에서 등호가 성립할 필요충분조건은?

① $a = b$

② $ab > 0$

③ $a = b = 0$

④ $a > b$

⑤ $b > a$

해설

$$a^2 + b^2 + ab = a^2 + ab + \frac{1}{4}b^2 + \frac{3}{4}b^2$$

$$= \left(a + \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0 \quad (\because \left(a + \frac{1}{2}b\right)^2 \geq 0, \frac{3}{4}b^2 \geq 0)$$

$$\therefore a^2 + b^2 \geq ab$$

단, 등호는 $a + \frac{1}{2}b = 0$ 이고 $b = 0$

즉, $a = 0$ 이고 $b = 0$ 일 때, 성립한다.

13. 다음을 만족하는 집합을 조건제시법으로 알맞게 나타내지 않은 것을 고르면?

3 개의 홀수와 1 개의 짝수로 이루어져있다.
원소들은 각각 2 개의 약수만을 가진 수이다.
원소는 10 미만의 자연수이다.

- ① $\{x \mid x \text{는 } 7 \text{ 미만의 소수}\}$
- ② $\{x \mid x \text{는 } 7 \text{ 이하의 소수}\}$
- ③ $\{x \mid x \text{는 } 9 \text{ 미만의 소수}\}$
- ④ $\{x \mid x \text{는 } 9 \text{ 이하의 소수}\}$
- ⑤ $\{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 미만의 소수}\}$

해설

3 개의 홀수와 1 개의 짝수로 이루어진 집합이므로 원소의 개수는 4 개임을 알 수 있다.
원소들은 각각 2 개의 약수만을 가지므로 소수임을 알 수 있다.
원소는 10 미만의 소수이므로 {2, 3, 5, 7} 임을 알 수 있다.
① $\{x \mid x \text{는 } 7 \text{ 미만의 소수}\} = \{2, 3, 5\}$
② $\{x \mid x \text{는 } 7 \text{ 이하의 소수}\} = \{2, 3, 5, 7\}$
③ $\{x \mid x \text{는 } 9 \text{ 미만의 소수}\} = \{2, 3, 5, 7\}$
④ $\{x \mid x \text{는 } 9 \text{ 이하의 소수}\} = \{2, 3, 5, 7\}$
⑤ $\{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 미만의 소수}\} = \{2, 3, 5, 7\}$

14. 집합 $A = \{11, 21, 31, 41, \dots\}$ 을 조건제시법으로 나타내어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 풀이 참조

해설

예) $\{x \mid x \text{는 일의 자리가 } 1 \text{ 인 } 10 \text{보다 큰 자연수}\}$ 또는 $\{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이상의 자연수 중에서 } 10 \text{으로 나누면 나머지가 } 1 \text{ 인 자연수}\}$

15. 집합 $A = \{2, 4, 6, 8, \dots, 18\}$ 를 조건제시법으로 올바르게 나타낸 것을 모두 골라라.

- ☐ ㉠ $A = \{x \mid 0 \leq x \leq 18 \text{인 정수}\}$
- ☐ ㉡ $A = \{x \mid 1 < x \leq 17 \text{인 짝수}\}$
- ☐ ㉢ $A = \{x \mid x \text{는 } 20 \text{보다 작은 짝수}\}$
- ☐ ㉤ $A = \{x \mid x \text{는 } 18 \text{ 이하의 짝수}\}$
- ☐ ㉥ $A = \{x \mid x \text{는 } 19 \text{ 미만의 짝수}\}$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉢

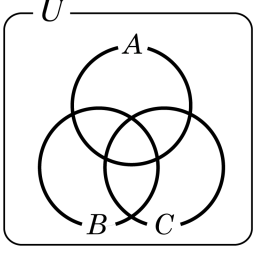
▷ 정답 : ㉤

▷ 정답 : ㉥

해설

$A = \{2, 4, 6, 8, \dots, 18\}$
 $= \{x \mid x \text{는 } 20 \text{보다 작은 짝수}\}$
 $= \{x \mid x \text{는 } 19 \text{ 미만의 짝수}\}$
 $= \{x \mid x \text{는 } 18 \text{ 이하의 짝수}\}$

16. 집합 A, B, C 가 전체집합 U 의 부분집합으로서 다음 그림과 같이 주어졌다. 두 집합 P, Q 에 대하여 $P \circ Q$ 를 $P \circ Q = (P - Q) \cup (Q - P^c)$ 와 같이 정의할 때, $A \circ A$ 의 값을 구하면?



- ① A ② B ③ C ④ $\emptyset$ ⑤ $A - B$

해설

$P \circ Q = (P - Q) \cup (Q - P^c)$ 이므로
 $A \circ A = (A - A) \cup (A - A^c) = \emptyset \cup A = A$ 이다.

17. 전체집합 $U = \{x|x \text{는 } 8 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의
세 부분집합 $A = \{x|x \text{는 } 8 \text{ 이하의 홀수}\}$, $B = \{1, 2, 3, 6\}$, $C = \{1, 5\}$
가 있다.
전체집합 U 의 두 부분집합 X, Y 에 대하여 $X \circ Y = (X \cup Y) \cap (X^c \cup Y^c)$
이라 할 때, $(A \circ B) \circ C$ 는?

- ① {1, 3}
- ② {1, 5}
- ③ {1, 7}
- ④ {1, 2, 5}
- ⑤ {1, 2, 6, 7}

해설

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{1, 3, 5, 7\}$ 이다.
 $X \circ Y = (X \cup Y) \cap (X^c \cup Y^c) = (X \cup Y) - (X \cap Y)$ 이므로
 $A \circ B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\} - \{1, 3\} = \{2, 5, 6, 7\}$ 이다.
따라서 $(A \circ B) \circ C = \{1, 2, 5, 6, 7\} - \{5\} = \{1, 2, 6, 7\}$ 이다.

18. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 연산 $\star$ 를 $A \star B = (A - B^c) \cup (B^c - A)$ 로 정의할 때, $(A \star B) \star A$ 와 같은 집합은?

① A ② B ③ $A \cap B$ ④ $A \cup B$ ⑤ $A - B$

해설

$$\begin{aligned}
 A \star B &= (A - B^c) \cup (B^c - A) \\
 &= (A \cap B) \cup (B^c \cap A^c) \text{ 이므로} \\
 (A \star B) \star A &= [\{(A \cap B) \cup (B^c \cap A^c)\} - A^c] \\
 &\quad \cup [A^c - \{(A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)\}] \\
 &= [\{(A \cap B) \cup (A \cup B)^c\} \cap A] \\
 &\quad \cup [A^c \cap \{(A \cap B)^c \cap (A \cup B)\}] \\
 &= [\{(A \cap B) \cap A\} \cup \{A \cap (A \cup B)^c\}] \\
 &\quad \cup [\{A^c \cap (A \cap B)^c\} \cap (A \cup B)] \\
 &= [(A \cap B) \cup \{A \cap A^c \cap B^c\}] \cup [\{A \cup (A \cap B)\}^c \cap (A \cup B)] \\
 &= (A \cap B) \cup \{A^c \cap (A \cup B)\} \\
 &= (A \cap B) \cup \{(A^c \cap A) \cup (A^c \cap B)\} \\
 &= (A \cap B) \cup (A^c \cap B) = (A \cup A^c) \cap B = B
 \end{aligned}$$