1. 평행이동 f : $(x,\ y) \to (x+1,\ y-2)$에 의하여 점$(3,\ 3)$은 어느 점에서 옮겨진 것인가?

① $(0,\ 0)$ ② $(3,\ 3)$ ③ $(1, -2)$

④ $(-1,\ 2)$ ⑤ $(2,\ 5)$

해설

평행이동 f는 x축의 방향으로 $+1$, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하는 변환이므로 $(a+1,\ b-2) = (3,\ 3)$ 따라서 $a = 2,\ b = 5$

2. 좌표평면 위의 점 $(-1,\ 3)$ 을 점 $(a,\ b)$ 에 대하여 대칭이동 시킨 점이 $(3,\ 5)$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

$(-1,3),(3,5)$ 의 중점이 (a,b) 이다.

$$\Rightarrow \left(\frac{-1+3}{2}, \frac{3+5}{2}\right) = (a,b)$$

$$\Rightarrow a+b=5$$

3. 원 $x^2+y^2+2x+6y+1=0$ 이 평행이동 $(x,\ y) \to (x+m,\ y+n)$ 에 의하여 원 $x^2+y^2-2x-4y+r=0$ 으로 옮겨질 때, $m+n+r$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

원 $x^2+y^2+2x+6y+1=0$ 에서
$(x+1)^2+(y+3)^2=9$ 이므로
이 원의 중심은 $(-1,-3)$ 이고 반지름의 길이는 3 이다.
한편, 원 $x^2+y^2-2x-4y+r=0$ 에서
$(x-1)^2+(y-2)^2=5-r$ 이므로
이 원의 중심은 $(1,2)$ 이고
반지름의 길이는 $\sqrt{5-r}$ 이다.
이때, 주어진 평행이동
$(x,y) \to (x+m,y+n)$ 에 의하여
처음 원의 중심 $(-1,-3)$ 은
옮겨진 원의 중심 $(1,2)$ 로 옮겨지므로
$(-1+m,-3+n)=(1,2)$
따라서, $-1+m=1$ 에서 $m=2$
$-3+n=2$ 에서 $n=5$
또한, 평행이동에 의하여 옮겨진 원의 크기는
변하지 않으므로 옮기기 전과 옮긴 후의
원의 반지름의 길이가 같다.
따라서, $\sqrt{5-r}=3$ 에서 $5-r=9$
$\therefore r=-4$
$\therefore m+n+r=2+5-4=3$

4. 원 $x^2+y^2-2x+6y+1=0$ 을 x 축 방향으로 a , y 축방향으로 b 만큼 평행이동하여 원점이 원의 중심이 되었다. 이때, 이와 같은 이동에 의하여 점 $(2,\ 5)$ 은 어느 점으로 옮겨지는가?

① $(0,\ 9)$ ② $(1,\ 3)$ ③ $(1,\ 8)$

④ $(3,\ 5)$ ⑤ $(4,\ 4)$

해설

$x^2+y^2-2x+6y+1=0$

$\Rightarrow\ (x-1)^2+(y+3)^2=9 \rightarrow$ 중심 : $(1,-3)$

$\therefore$ 원점이 중심이 되려면

x 축으로 -1, y 축으로 3 만큼 평행 이동해야 한다.

$\Rightarrow\ (2-1, 5+3)\ \rightarrow\ (1,8)$

5. 평행이동 $f\ :\ (x,\ y) \rightarrow (x+a,\ y+b)$에 의하여 점 $(1,\ 2)$는 점 $(-1,\ 3)$으로 옮겨진다. 이 때, 평행이동 f에 의하여 원 $x^2+y^2+2x-2y+1=0$이 옮겨진 원의 중심의 좌표는?

① $(1, -2)$　② $(-3,\ 2)$　③ $(2, -1)$
④ $(-1,\ 2)$　⑤ $(2, -3)$

해설

평행이동 f는 x축의 방향으로 -2,
y축의 방향으로 $+1$만큼
평행이동 하는 변환이다.
$x^2+y^2+2x-2y+1=0$의 중심은
$(-1,\ 1)$이므로 평행이동 f에 의하여
$(-1-2,\ 1+1)=(-3,\ 2)$로 이동한다.

6. 원 $x^2+y^2-2x+4y+4=0$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면 점 $(1,0)$ 을 지난다고 한다. 이 때, 점 (a,b) 가 나타내는 도형의 길이를 구하면?

① $\frac{\pi}{2}$ ② π ③ 2π ④ 4π ⑤ $\frac{7}{3}\pi$

해설

$x^2+y^2-2x+4y+4=0$ 을 표준형으로 나타내면
$(x-1)^2+(y+2)^2=1$
이 원을 x 축의 방향으로 a 만큼,
y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면
$(x-a-1)^2+(y-b+2)^2=1$
이 원이 점 $(1,0)$ 을 지나므로
$(-a)^2+(-b+2)^2=1$
$\therefore a^2+(b-2)^2=1$
따라서, 점 (a,b) 가 나타내는 도형은
중심이 $(0,2)$, 반지름의 길이가 1 인 원이므로
구하는 도형의 길이는 2π 이다.

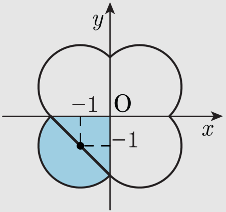
7. 원 $(x+1)^2+(y+1)^2=2$의 제 3사분면에 있는 부분과 이 부분을 각각 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동해서 생기는 모든 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하면?

① $\pi+2$ ② $2\pi+4$ ③ $2\pi+8$

④ $4\pi+8$ ⑤ $8\pi+8$

해설

원 $(x+1)^2+(y+1)^2=2$는 다음 그림과 같으므로



어두운 부분의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\pi\times\sqrt{2}^2+\frac{1}{2}\times2\times2=\pi+2$

따라서 구하는 넓이는 어두운 부분의 넓이의 4배와 같으므로

$4(\pi+2)=4\pi+8$

8. 좌표평면 위에서 원 $(x-1)^2+(y-3)^2=4$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 중심거리는?

① $\sqrt{2}$　② 2　③ 3　④ $2\sqrt{2}$　⑤ $3\sqrt{2}$

해설

원 $(x-1)^2+(y-3)^2=4$를
직선 $y=x$에 대하여
대칭이동 시킨 원의 방정식은
$(x-3)^2+(y-1)^2=4$ 이고,
이 원의 중심은 $(3,1)$이다.
두 원의 중심거리는
두 점 $(1,3),(3,1)$ 사이의 거리와 같으므로
$\sqrt{(1-3)^2+(3-1)^2}=2\sqrt{2}$

9. 직선 $3x-4y+1=0$ 을 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동 한 후 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은?

① $3x-4y+12=0$ ② $3x-4y-4=0$

③ $4x-3y+12=0$ ④ $-4x+3y+12=0$

⑤ $-4x+3y-4=0$

해설

1) x 축으로 -1 , y 축으로 2만큼 평행이동

$\Rightarrow 3(x+1)-4(y-2)+1=0$

$\Rightarrow 3x-4y+12=0$

2) $y=x$ 대칭

$\Rightarrow -4x+3y+12=0$

10. 직선 $y = 2x + 2$ 를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 직선을 l_1 , 직선 l_1 을 x 축에 대하여 대칭이동한 직선을 l_2 라 할 때, 직선 l_2 의 방정식은?

① $x - 2y - 2 = 0$　② $2x + y - 2 = 0$　③ $x + 2y - 2 = 0$

④ $2x + y + 2 = 0$　⑤ $x + 2y + 2 = 0$

해설

$y = 2x + 2$ 를 $y = x$ 에 대하여
대칭이동한 직선 l_1 은 $x = 2y + 2$,
l_1 을 x 축에 대하여
대칭이동한 직선 l_2 는 $x = -2y + 2$ 이다.
따라서 직선 l_2 의 방정식은 $x + 2y - 2 = 0$

11. 점 $(1,-2)$를 지나는 직선을 점$(2,\ 3)$에 대하여 대칭이동한 후 x축에 대하여 대칭이동 하였더니 점 $(4,-4)$를 지난다고 한다. 처음 직선의 방정식을 구하면?

① $y=-4x+2$ ② $y=4x+2$ ③ $y=-4x+4$

④ $y=4x+4$ ⑤ $y=-4x+6$

해설

$(1,-2)$ 를 지나는 직선의 방정식을

$y+2=m(x-1)$ $\cdots$①이라 하면

①식을 점 $(2,3)$에 대칭이동하면 (중점공식이용)

$x \to 4-x$ $y \to 6-y$이므로

$6-y+2=m(4-x-1)$, $y=m(x-3)+8\cdots$②

직선 ②를 x축에 대칭이동하면

$-y=m(x-3)+8$ $\cdots$③

직선 ③이 점 $(4,-4)$를 지나므로

$4=m(4-3)+8 \therefore m=-4$

따라서 처음 직선의 방정식 ①은

$y+2=-4(x-1)$, $y=-4x+2$

12. 점 $\mathrm{A}(3,\ 4)$ 를 직선 $x-y+2=0$ 에 대하여 대칭이동한 점을 A' 라 할 때, A' 의 좌표는?

① $(-3,\ 5)$ ② $(-3,\ 8)$ ③ $(3,\ 2)$
④ $(2,\ 5)$ ⑤ $(5,\ 2)$

해설

A' 를 $(a,\ b)$ 라 하자
i) A' 과 $(3,\ 4)$ 의 중점은 $x-y+2=0$ 을 지난다.

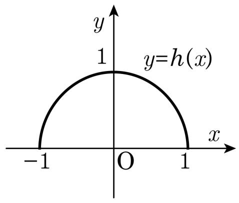
$$\therefore\ \frac{a+3}{2}-\frac{b+4}{2}+2=0$$

ii) A' 과 $(3,\ 4)$ 를 잇는 직선과 직선 $x-y+2=0$ 은 수직으로 만난다.

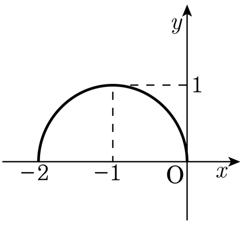
$$\therefore\ \frac{4-b}{3-a}=-1$$

i) 과 ii) 를 연립하여 a, b 를 구하면,
$a=2,\ b=5$

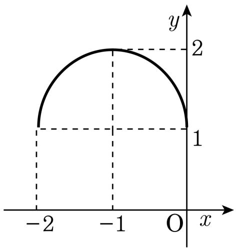
13. 함수 $y=f(x)$ 에 대하여 $g(x)=f(x-2)+1$, $h(x)=g(x+1)-2$ 라고 할 때, $y=h(x)$ 의 그래프는 그림과 같이 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1 인 원의 일부이다. 이 때, 다음 중 $y=f(x)$ 의 그래프로 옳은 것은?



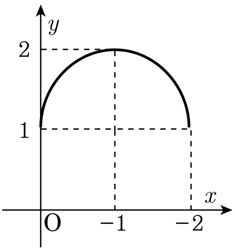
①



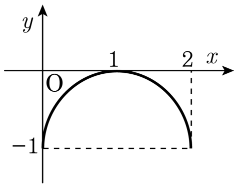
②



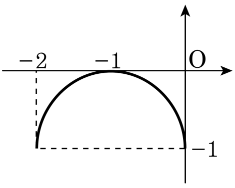
③



④

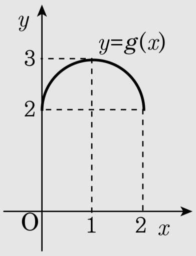


⑤

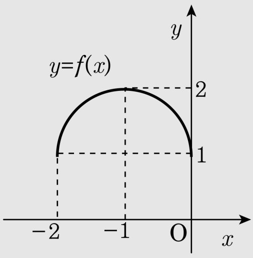


해설

$y=h(x)$ 의 그래프는 $y=g(x)$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 -1 만큼,
y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이므로
$y=g(x)$ 의 그래프는 $y=h(x)$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼
평행이동한 것이다.
따라서, $y=g(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



또, $y=g(x)$ 의 그래프는 $y=f(x)$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼
평행이동한 것이므로 $y=f(x)$ 의 그래프는
$y=g(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼,
y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.
따라서, $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



14. 다음은 갑, 을, 병, 정 네 사람이 도형의 이동에 대하여 말한 것이다. 올바르게 말한 사람은?

> 갑 : 점 $(x,\ y)$ 를 점 $(x-a, y-b)$ 로 옮기는 평행이동에 의하여 $f(x,y) = 0$ 이 나타내는 도형은 $f(x+a, y+b) = 0$ 이 나타내는 도형으로 이동 한다.
>
> 을 : 점 (x,y) 를 점 $(x-2, y+1)$ 로 옮기는 평행이동에 의하여 점 $(2,-1)$ 은 점 $(0,0)$ 으로 이동한다.
>
> 병 : 점 (x,y) 를 점 $(-x,-y)$ 로 옮기는 대칭이동에 의하여 $y = f(x)$ 이 나타내는 도형은 $y = -f(-x)$ 이 나타내는 도형으로 이동한다.
>
> 정 : 점 (x,y) 를 점 (y,x) 로 옮기는 대칭이동에 의하여 $f(x,y) = 0$ 이 나타내는 도형은 $f(y,x) = 0$ 이 나타내는 도형으로 이동한다.

① 갑, 을, 병 ② 갑, 을, 정 ③ 갑, 병, 정

④ 을, 병, 정 ⑤ 갑, 을, 병, 정

해설

갑, 을, 정 : 참

병 : $(x,y) \ \rightarrow \ (-x,-y)$: 원점 대칭

$\therefore \ \ y = f(x) \ \rightarrow \ -y = f(-x)$: 거짓

15. 다음 중 원 $x^2+y^2+4x-4y+4=0$ 을 평행이동하여 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은?

① $x^2+y^2=\frac{1}{3}$ ② $x^2+y^2=1$

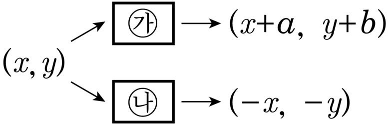
③ $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$ ④ $x^2+y^2=4$

⑤ $(x+1)^2+(y-1)^2=\frac{1}{2}$

해설

평행이동하여 겹쳐질 수 있으려면
반지름의 길이가 같아야 한다.
$x^2+y^2+4x-4y+4=0$ 에서 $(x+2)^2+(y-2)^2=4$
따라서 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은
반지름의 길이가 2인 ④이다.

16. 다음과 같은 두 연산 장치 ㉮, ㉯가 있다.



원 $(x-3)^2+(y-4)^2=25$가 연산 장치 ㉮와 ㉯를 연속하여 통과하면서 원 $x^2+y^2=r^2$으로 출력되었다. 이때, $a^2+b^2+r^2$의 값은?

① 30　　② 35　　③ 40　　④ 45　　⑤ 50

해설

원의 중심만 따로 생각한다.

$(3,4) \xrightarrow{\text{가}} (3+a, 4+b) \xrightarrow{\text{나}} (-3-a, -4-b)$

$\Rightarrow\ (-3-a, -4-b) = (0,0)$

$\therefore\ a=-3,\ \ b=-4,\ \ r=5$

$a^2+b^2+r^2=50$

17. 직선 $x+2y-3=0$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 후 다시 $y=x$ 에 대하여 대칭이동 하였더니, 원 $(x-1)^2+(y-a)^2=1$ 의 넓이를 이등분하였다. 이 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=5$

해설

$x+2y-3=0 \Rightarrow x-2y-3=0$($x$ 축 대칭이동)

$\Rightarrow \quad y-2x-3=0$ ($y=x$ 대칭이동)

원의 넓이를 이등분하려면, 원의 중심이 직선 위에 있으면 된다.

따라서 중심의 좌표를 직선에 대입한다.

$\therefore\ a-2-3=0 \qquad \therefore\ a=5$

18. 점 $(-2,\ 1)$ 을 직선 $y=x-1$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $(a,\ b)$ 라 할 때, ab 의 값은?

① -8 ② -6 ③ -5 ④ -3 ⑤ -2

해설

두 점 $(-2,\ 1)$, $(a,\ b)$ 를 이은 선분의
중점이 직선 $y=x-1$ 위에 있으므로

$$\frac{1+b}{2}=\frac{-2+a}{2}-1,$$

$\therefore\ a-b=5\ \cdots$ ㉠

또, 두 점 $(-2,\ 1)$, $(a,\ b)$ 를 이은 직선의
기울기가 -1 이므로 $\dfrac{b-1}{a-(-2)}=-1$

$\therefore\ a+b=-1\ \cdots$ ㉡

㉠, ㉡ 을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-3$

$\therefore\ ab=-6$

19. 점 $(1, 2)$ 에 대한 점 (a, b) 의 대칭점을 (a', b') 이라 하고, 점 (a, b) 가 직선 $y = 3x + 1$ 위를 움직일 때, 다음 중 점 (a', b') 이 움직이는 도형 위의 점은?

① $(-1, 2)$ ② $(0, -1)$ ③ $(1, 0)$

④ $(2, 1)$ ⑤ $(3, 5)$

해설

$y = 3x + 1$ 위의 점 $(a,\ b)$ 와 대칭점 $(a',\ b')$ 의 중점이 $(1,\ 2)$ 이므로

$$\frac{a' + a}{2} = 1,\ \frac{b' + b}{2} = 2$$

$a' = 2 - a,$

$b' = 4 - b = 3 - 3a\ \ (\because\ b = 3a + 1)$

$\therefore\ (a',\ b') = (2 - a,\ 3 - 3a)$

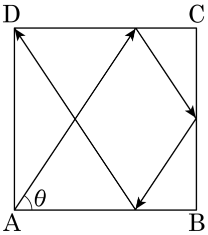
$x = 2 - a, y = 3 - 3a$ 라 하고 a 를 소거하면

$y = 3 - 3(2 - x)\ ,\ \ y = 3x - 3$

즉 (a', b') 은 직선 $y = 3x - 3$ 위를 움직인다.

$\therefore\ (1,\ 0)$ 이 이 직선 위에 있다.

20. 다음 그림과 같이 정사각형 ABCD 의 꼭짓점 A 에서 발사된 빛이 꼭짓점 D 로 들어올 때, $\tan\theta$ 의 값은? (단, 입사각과 반사각은 같다.)



① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$

④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 2

해설

다음 그림에서 정사각형 ABCD 의 꼭짓점 A 에서 발사된 빛이 그림과 같이 꼭짓점 D 에 들어올 때 $\tan\theta$ 의 값은 $\frac{3}{2}$ 이다.