1. $a,\ b,\ x\ y$가 실수이고, $a^2+b^2=8, x^2+y^2=2$일 때 $ax+by$의 최댓값과 최솟값의 곱은?

① -16　② -4　③ 0　④ 4　⑤ 16

해설

$a,\ b,\ x,\ y$가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$
$8 \times 2 \geq (ax+by)^2$
$\therefore -4 \leq ax+by \leq 4$
(최댓값) $\times$(최솟값)$= -16$

2. 실수 $x,\ y,\ z$에 대하여 $x-y+4z=3\sqrt{2}$일 때 $x^2+y^2+z^2$의 최솟값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$x,\ y,\ z$가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$\{1+(-1)^2+4^2\}(x^2+y^2+z^2)$
$\geq (x-y+4z)^2$
$18(x^2+y^2+z^2) \geq (3\sqrt{2})^2$
$x^2+y^2+z^2 \geq 1$
따라서 $x^2+y^2+z^2$의 최솟값은 1이다.

3. 실수 $a,\ b,\ x,\ y$에 대하여 $a^2+b^2=5, x^2+y^2=3$일 때 다음 중 $ax+by$의 값이 될 수 <u>없는</u> 것은?

① -1　　② 0　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$a,\ b,\ x,\ y$가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$
$5 \times 3 \geq (ax+by)^2$
$\therefore -\sqrt{15} \leq ax+by \leq \sqrt{15}$
따라서 4는 $ax+by$의 범위에 속하지 않는다.

4. 다음 보기 중에서 p 는 q 이기 위한 충분조건인 것을 모두 고르면?

㉠ $p : x = 1,\ q : x^2 - 4x + 3 = 0$
㉡ $p : 0 < x < 1,\ q : x < 2$
㉢ $p : a > b,\ q : a^2 > b^2$

① ㉠　　② ㉠, ㉡　　③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$P \subset Q \Rightarrow p \rightarrow q$가참
$p \rightarrow q$ 가 참이면 p 는 q 이기 위한 충분조건
㉢ $a = 1, b = -2 \Rightarrow a^2 < b^2$
$\therefore$ ㉠, ㉡ 참

5. 다음 중 p는 q이기 위한 충분조건이지만, 필요조건은 아닌 것은?

① $p : xz = yz,\ q : x = y$

② p : 3 의 배수, q : 9 의 배수

③ $p : x = 1, y = 1,\ q : x + y = 2, xy = 1$

④ $p : |x - 1| = 2,\ q : x^2 - 2x - 3 = 0$

⑤ $p : a + b > 2,\ q : a > 1$ 또는 $b > 1$

해설

① 필요조건
② 필요조건
③ 필요충분조건
④ 필요충분조건
⑤ [반례] $a = 2,\ b = -10$일 때, $q \to p$가 성립하지 않는다.

6. 다음 보기에서 x, y, z 가 실수일 때, 조건 p 가 조건 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $p : x > 0$ 또는 $y > 0$, $q : x + y > 0$

㉡ $p : x = y$, $q : xz = yz$

㉢ $p : 0 < x^2 \leq 2$, $q : 0 < x \leq \sqrt{2}$

㉣ $p : x^2 + y^2 = 0$, $q : xy = 0$

㉤ $p : (x - y)(y - z) = 0$, $q : x = z$

① ㉠, ㉡　② ㉡, ㉢　③ ㉢, ㉣　④ ㉡, ㉣　⑤ ㉣, ㉤

해설

㉠ $p \not\Rightarrow q, q \Rightarrow p$　∴ 필요조건만이다.
㉡ $p \Rightarrow q, q \not\Rightarrow p$　∴ 충분조건만이다.
㉢ $p \not\Rightarrow q, q \Rightarrow p$　∴ 필요조건만이다.
㉣ $p \Rightarrow q, q \not\Rightarrow p$　∴ 충분조건만이다.
㉤ $p \not\Rightarrow q, q \not\Rightarrow p$　∴ 아무 조건도 아니다.

7. 자연수로 이루어진 집합 $A = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \cdots,\ 2n\}$ 의 부분집합 중에서 원소 $2(n-1)$ 과, $2n$ 을 포함하지 않은 부분집합의 개수가 32 일 때, n 의 값을 구하면?

① 10　② 14　③ 18　④ 22　⑤ 26

해설

집합 A 의 원소의 개수가 n 개이므로
$2^{n-2} = 32 = 2^5$ 이다.
$\therefore\ n-2 = 5$
$\therefore\ n = 7$
원소의 개수가 7 개이므로 $A = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14\}$, $n = 14$ 이다.

8. 집합 $A = \{x \mid x$는 a 이하인 5의 배수$\}$ 에 대하여 집합 A 의 부분집합의 개수가 32 개가 되기 위한 자연수 a 의 값은?

① 20 ② 25 ③ 30 ④ 35 ⑤ 40

해설

$32 = 2^5$ 이므로 집합 A 의 원소의 개수는 5 개이어야 한다.
$A = \{5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25\}$ 이므로 $a = 25$ 이다.

9. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots,\ n\}$ 의 부분집합 중에서 원소 1, 3, 5를 반드시 포함하는 부분집합의 개수가 32 개일 때, 자연수 n 의 값은?

① 8　　② 9　　③ 10　　④ 11　　⑤ 12

해설

집합 A 의 원소의 개수가 n 개이므로 원소 1, 3, 5를 반드시 포함하는 부분집합의 개수는 2^{n-3} 개이다.

$2^{n-3} = 32,\ 2^{n-3} = 2^5$

$n - 3 = 5$ 이므로 $n = 8$

10. 전체집합 $U = \{x \mid |x| \le 10$인 정수$\}$ 의 두 부분집합 $A = \{x \mid |x| \le 4$인 정수$\}$, $B = \{x \mid 0 < x < 10$인 소수$\}$ 에 대하여 $A^c \cap B^c$ 을 원소의 합은?

① -5 ② -10 ③ -12 ④ -15 ⑤ -18

해설

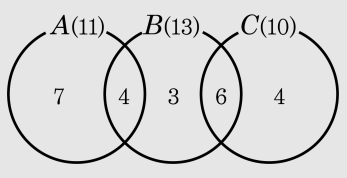
$U = \{-10, -9, -8, -7, \cdots, 7, 8, 9, 10\}$,
$A = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$,
$B = \{2, 3, 5, 7\}$
$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = U - (A \cup B)$ 이고 $A \cup B = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 7\}$ 이므로
$A^c \cap B^c = \{-10, -9, -8, -7, -6, -5, 6, 8, 9, 10\}$
따라서 원소의 합은 -12

11. 세 집합 A, B, C 에 대하여 $n(A) = 11$, $n(B) = 13$, $n(C) = 10$, $n(A \cap B) = 4$, $n(B \cup C) = 17$, $A \cap C = \varnothing$ 일 때, $A \cup B \cup C$ 의 원소의 개수는?

① 12　　② 17　　③ 24　　④ 30　　⑤ 34

해설

주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



$\therefore\ n(A \cup B \cup C) = 24$

12. $U = \{x | 0 \le x \le 12,\ x$는 자연수$\}$ 의 두 부분집합 $A = \{x | x$는 12 이하의 4의 배수$\}$, $B = \{3, 4, 7, 8, 11\}$ 에 대하여 $n((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c))$ 는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$A = \{4, 8, 12\}$, $B = \{3, 4, 7, 8, 11\}$ 이므로

$$n((A \cup B^c) \cup (B \cap A^c)) = n((A - B) \cup (B - A))$$
$$= n(\{3, 7, 11, 12\}) = 4$$