

1. a, b, x, y 가 실수이고, $a^2 + b^2 = 8, x^2 + y^2 = 2$ 일 때 $ax + by$ 의 최댓값과 최솟값의 곱은?

① -16

② -4

③ 0

④ 4

⑤ 16

해설

a, b, x, y 가 실수이므로

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$$

$$8 \times 2 \geq (ax + by)^2$$

$$\therefore -4 \leq ax + by \leq 4$$

$$(\text{최댓값}) \times (\text{최솟값}) = -16$$

2. 실수 x, y, z 에 대하여 $x - y + 4z = 3\sqrt{2}$ 일 때 $x^2 + y^2 + z^2$ 의 최솟값은?

① $\frac{1}{3}$

② $\frac{1}{2}$

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

x, y, z 가 실수이므로

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$\{1 + (-1)^2 + 4^2\} (x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\geq (x - y + 4z)^2$$

$$18(x^2 + y^2 + z^2) \geq (3\sqrt{2})^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$$

따라서 $x^2 + y^2 + z^2$ 의 최솟값은 1이다.

3. 실수 a, b, x, y 에 대하여 $a^2 + b^2 = 5, x^2 + y^2 = 3$ 일 때 다음 중 $ax + by$ 의 값이 될 수 없는 것은?

① -1

② 0

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

a, b, x, y 가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$$

$$5 \times 3 \geq (ax + by)^2$$

$$\therefore -\sqrt{15} \leq ax + by \leq \sqrt{15}$$

따라서 4는 $ax + by$ 의 범위에 속하지 않는다.

4. 다음 보기 중에서 p 는 q 이기 위한 충분조건인 것을 모두 고르면?

㉠ $p : x = 1, q : x^2 - 4x + 3 = 0$

㉡ $p : 0 < x < 1, q : x < 2$

㉢ $p : a > b, q : a^2 > b^2$

① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$P \subset Q \Rightarrow p \rightarrow q$ 가 참

$p \rightarrow q$ 가 참이면 p 는 q 이기 위한 충분조건

㉢ $a = 1, b = -2 \Rightarrow a^2 < b^2$

$\therefore$ ㉠, ㉡ 참

5. 다음 중 p 는 q 이기 위한 충분조건이지만, 필요조건은 아닌 것은?

① $p : xz = yz, q : x = y$

② $p : 3$ 의 배수, $q : 9$ 의 배수

③ $p : x = 1, y = 1, q : x + y = 2, xy = 1$

④ $p : |x - 1| = 2, q : x^2 - 2x - 3 = 0$

⑤ $p : a + b > 2, q : a > 1$ 또는 $b > 1$

해설

① 필요조건

② 필요조건

③ 필요충분조건

④ 필요충분조건

⑤ [반례] $a = 2, b = -10$ 일 때, $q \rightarrow p$ 가 성립하지 않는다.

6. 다음 보기에서 x, y, z 가 실수일 때, 조건 p 가 조건 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $p : x > 0$ 또는 $y > 0, q : x + y > 0$

㉡ $p : x = y, q : xz = yz$

㉢ $p : 0 < x^2 \leq 2, q : 0 < x \leq \sqrt{2}$

㉤ $p : x^2 + y^2 = 0, q : xy = 0$

㉥ $p : (x - y)(y - z) = 0, q : x = z$

① ㉠, ㉡

② ㉡, ㉢

③ ㉢, ㉤

④ ㉠, ㉤

⑤ ㉤, ㉥

해설

㉠ $p \not\Rightarrow q, q \Rightarrow p \therefore$ 필요조건만이다.

㉡ $p \Rightarrow q, q \not\Rightarrow p \therefore$ 충분조건만이다.

㉢ $p \not\Rightarrow q, q \Rightarrow p \therefore$ 필요조건만이다.

㉤ $p \Rightarrow q, q \not\Rightarrow p \therefore$ 충분조건만이다.

㉥ $p \not\Rightarrow q, q \not\Rightarrow p \therefore$ 아무 조건도 아니다.

7. 자연수로 이루어진 집합 $A = \{2, 4, 6, 8, \dots, 2n\}$ 의 부분집합 중에서 원소 $2(n-1)$ 과, $2n$ 을 포함하지 않은 부분집합의 개수가 32 일 때, n 의 값을 구하면?

① 10

② 14

③ 18

④ 22

⑤ 26

해설

집합 A 의 원소의 개수가 n 개이므로

$$2^{n-2} = 32 = 2^5 \text{ 이다.}$$

$$\therefore n - 2 = 5$$

$$\therefore n = 7$$

원소의 개수가 7 개이므로 $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$, $n = 14$ 이다.

8. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } a \text{ 이하인 } 5 \text{의 배수}\}$ 에 대하여 집합 A 의 부분집합의 개수가 32 개가 되기 위한 자연수 a 의 값은?

① 20

② 25

③ 30

④ 35

⑤ 40

해설

$32 = 2^5$ 이므로 집합 A 의 원소의 개수는 5 개이어야 한다.
 $A = \{5, 10, 15, 20, 25\}$ 이므로 $a = 25$ 이다.

9. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, n\}$ 의 부분집합 중에서 원소 1, 3, 5를 반드시 포함하는 부분집합의 개수가 32 개일 때, 자연수 n 의 값은?

① 8

② 9

③ 10

④ 11

⑤ 12

해설

집합 A 의 원소의 개수가 n 개이므로 원소 1, 3, 5를 반드시 포함하는 부분집합의 개수는 2^{n-3} 개이다.

$$2^{n-3} = 32, 2^{n-3} = 2^5$$

$$n - 3 = 5 \text{ 이므로 } n = 8$$

10. 전체 집합 $U = \{x \mid |x| \leq 10 \text{인 정수}\}$ 의 두 부분집합 $A = \{x \mid |x| \leq 4 \text{인 정수}\}$, $B = \{x \mid 0 < x < 10 \text{인 소수}\}$ 에 대하여 $A^c \cap B^c$ 을 원소의 합은?

① -5

② -10

③ -12

④ -15

⑤ -18

해설

$$U = \{-10, -9, -8, -7, \dots, 7, 8, 9, 10\},$$

$$A = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\},$$

$$B = \{2, 3, 5, 7\}$$

$$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = U - (A \cup B) \text{ 이고 } A \cup B = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 7\} \text{ 이므로}$$

$$A^c \cap B^c = \{-10, -9, -8, -7, -6, -5, 6, 8, 9, 10\}$$

따라서 원소의 합은 -12

11. 세 집합 A, B, C 에 대하여 $n(A) = 11$, $n(B) = 13$, $n(C) = 10$, $n(A \cap B) = 4$, $n(B \cup C) = 17$, $A \cap C = \emptyset$ 일 때, $A \cup B \cup C$ 의 원소의 개수는?

① 12

② 17

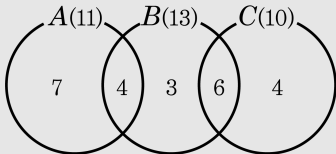
③ 24

④ 30

⑤ 34

해설

주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



$$\therefore n(A \cup B \cup C) = 24$$

12. $U = \{x | 0 \leq x \leq 12, x \text{는 자연수}\}$ 의 두 부분 집합 $A = \{x | x \text{는 } 12 \text{ 이하의 } 4 \text{의 배수}\}$, $B = \{3, 4, 7, 8, 11\}$ 에 대하여 $n((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c))$ 는?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$A = \{4, 8, 12\}$, $B = \{3, 4, 7, 8, 11\}$ 이므로

$$\begin{aligned} n((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)) &= n((A - B) \cup (B - A)) \\ &= n(\{3, 7, 11, 12\}) = 4 \end{aligned}$$