1. 세 수 $A = \sqrt{6} + \sqrt{7}, B = \sqrt{5} + 2\sqrt{2}$, $C = \sqrt{3} + \sqrt{10}$ 의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $A < B < C$　② $A < C < B$　③ $B < A < C$

④ $C < A < B$　⑤ $C < B < A$

해설

$A > 0,\ B > 0,\ C > 0$ 이므로

A^2, B^2, C^2 의 대소를 비교한 것과 같다.

$$A^2 = (\sqrt{6} + \sqrt{7})^2 = 13 + 2\sqrt{42}$$
$$B^2 = (\sqrt{5} + 2\sqrt{2})^2 = 13 + 2\sqrt{40}$$
$$C^2 = (\sqrt{3} + \sqrt{10})^2 = 13 + 2\sqrt{30}$$

이므로 $A^2 > B^2 > C^2$ 이다.

따라서 $A > B > C$

2. $a > b > 0$ 일 때, $a^2 > b^2$ 이다. 임을 이용하여 $x > y > -1$ 일 때, $\sqrt{x+1}$, $\sqrt{y+1}$ 의 대소를 비교하면?

① $\sqrt{x+1} < \sqrt{y+1}$
② $\sqrt{x+1} \le \sqrt{y+1}$
③ $\sqrt{x+1} > \sqrt{y+1}$
④ $\sqrt{x+1} \ge \sqrt{y+1}$
⑤ $\sqrt{x+1} = \sqrt{y+1}$

해설

$$\begin{aligned}(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{y+1})^2 &= (x+1) - (y+1) \\ &= x - y > 0\end{aligned}$$

$\therefore \sqrt{x+1} > \sqrt{y+1}$

3. $x > 0,\ y > 0$ 일 때 두 식 $\sqrt{x} + \sqrt{y},\ \sqrt{2(x+y)}$ 를 바르게 비교한 것은?

① $\sqrt{x} + \sqrt{y} < \sqrt{2(x+y)}$

② $\sqrt{x} + \sqrt{y} \le \sqrt{2(x+y)}$

③ $\sqrt{x} + \sqrt{y} > \sqrt{2(x+y)}$

④ $\sqrt{x} + \sqrt{y} \ge \sqrt{2(x+y)}$

⑤ $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2(x+y)}$

해설

$\sqrt{x} + \sqrt{y} > 0,\ \sqrt{2(x+y)} > 0$

이 때 $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 - \left\{\sqrt{2(x+y)}\right\}^2$

$= (x + y + 2\sqrt{xy}) - (2x - 2y)$

$= -(x - 2\sqrt{xy} + y)$

$= -(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \le 0$

이므로 $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 \le \left\{\sqrt{2(x+y)}\right\}^2$

$\therefore (\sqrt{x} + \sqrt{y}) \le \sqrt{2(x+y)}$

(단, 등호는 $\sqrt{x} = \sqrt{y}$, 즉 $x = y$일때성립)

4. 다음 중 옳지 않은 것을 고르면?

① $A=\varnothing$ 이면 $n(A)=0$

② $B=\{a,\ b\}$ 이면 $n(B)=2$

③ $C=\{x \mid x$는 8의 약수$\}$ 이면 $n(C)=4$

④ $D=\{0\}$ 이면 $n(D)=0$

⑤ $E=\{y \mid y$는 10 이하의 짝수$\}$ 이면 $n(E)=5$

해설

④ $D=\{0\}$ 이면 $n(D)=1$

5. 다음 중 옳은 것은?

① $n(\varnothing) = n(\{0\})$

② $n(\{1, 2, 4\}) - n(\{1, 4\}) = 2$

③ $n(\{4\}) = 4$

④ $n(\{x \mid x$는 40 이하의 짝수$\}) = 40$

⑤ $n(\{x \mid x$는 $2 < x < 4$인 홀수$\}) = 1$

해설

①$n(\varnothing) = 0,\ n(\{0\}) = 1$
②$n(\{1,\ 2,\ 4\}) - n(\{1,\ 4\}) = 3 - 2 = 1$
③$n(\{4\}) = 1$
④$n(\{2,\ 4,\ 6,\ \cdots,\ 40\}) = 20$
⑤$n(\{3\}) = 1$

6. $n(\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}) - n(\{1,\ 2,\ 3\})$ 의 값으로 옳은 것은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$n(\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}) - n(\{1,\ 2,\ 3\}) = 4 - 3 = 1$

7. $a > 0,\ b > 0$일 때, $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{9}{a}\right)$의 최솟값은?

① 6　② 9　③ 12　④ 16　⑤ 20

해설

식을 전개한 후 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하면

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{9}{a}\right)=ab+9+1+\frac{9}{ab}$$

$$ab+\frac{9}{ab}\geq 2\sqrt{ab\times\frac{9}{ab}}=2\sqrt{9}=6$$

$$\therefore\ \left(a+\frac{1}{6}\right)\left(b+\frac{9}{a}\right)\geq 10+6=16$$

8. 양수 a, b에 대하여 $a^2+b^2=1$을 만족할 때, $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$의 최솟값은?

① 2　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

해설

$a^2 >,\ b^2 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a^2+b^2 \geq 2\sqrt{a^2b^2} = 2ab$

(단, 등호는 $a^2=b^2$ 일 때 성립)

그런데 $a^2+b^2=1$ 이므로 $1 \geq 2ab$

$\therefore ab \leq \frac{1}{2}$

$\frac{1}{a^2} > 0,\ \frac{1}{b^2} > 0$이므로 산술평균 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2} \geq 2\sqrt{\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{b^2}}$

$\frac{2}{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$

(단, 등호는 $a^2=b^2$ 일 때 성립)

따라서 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$ 의 최솟값은 4이다.

9. 양수 a, b에 대하여 $\dfrac{4a+9b}{6\sqrt{ab}}$ 의 최솟값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$\dfrac{4a+9b}{6\sqrt{ab}} = \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{4\sqrt{a}}{\sqrt{b}} + \dfrac{9\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right)$

$\geq \dfrac{1}{6} \times 2 \times \sqrt{4 \times 9} = 2$

해설

10. a, b, c가 실수이고 $a^2+b^2+c^2=4$일 때 $a+b+\sqrt{2}c$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M-m$의 값을 구하면?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

코시-슈바르츠 부등식을 이용하면

$$\left\{1^2+1^2+(\sqrt{2})^2\right\}(a^2+b^2+c^2) \ge (a+b+\sqrt{2}c)^2$$

$\therefore\ (a+b+\sqrt{2}c)^2 \le 4^2$

$\therefore\ -4 \le a+b+\sqrt{2}c \le 4$

따라서 최댓값은 4, 최솟값은 -4

$\therefore\ M=4,\ m=-4$

$M-m=8$

11. 실수 a, b, x, y에 대하여 $a^2 + b^2 = 1$이고 $x^2 + y^2 = 2$이 성립할 때, $ax + by$의 최댓값은?

① 1　② $\sqrt{2}$　③ $\sqrt{3}$　④ 2　⑤ $\sqrt{6}$

해설

$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$에 주어진 값
$a^2 + b^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 2$을 대입하면
$1 \times 2 \geq (ax + by)^2$이다.
따라서 $-\sqrt{2} \leq ax + by \leq \sqrt{2}$
$\therefore ax + by$의 최댓값은
$\sqrt{2}$이다.

12. 네 실수 $a,\ b,\ c,\ d$에 대하여 $a+b+c+d=8$, $a^2+b^2+c^2+d^2=124$가 성립할 때, 실수 d의 최솟값 m과 최댓값 M의 합 $m+M$의 값은?

① -7 ② -3 ③ 0 ④ 1 ⑤ 4

해설

$a+b+c+d=8$, $a^2+b^2+c^2+d^2=124$

$a+b+c=8-d$, $a^2+b^2+c^2=124-d^2$

코시-슈바르츠 부등식에서

$(1+1+1)(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2$ 이므로

$3(124-d^2) \geq (8-d)^2$

$372-3d^2 \geq d^2-16d+64$

$4d^2-16d+64-372 \leq 0$

$4d^2-16d-308 = d^2-4d-77 \leq 0$

$\therefore (d-11)(d+7) \leq 0$

$\therefore -7 \leq d \leq 11$

따라서 최솟값 $m=-7$, 최댓값 $M=11$

이므로 $m+M=-7+11=4$