

1. 세 수 $A = \sqrt{6} + \sqrt{7}$, $B = \sqrt{5} + 2\sqrt{2}$, $C = \sqrt{3} + \sqrt{10}$ 의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $A < B < C$

② $A < C < B$

③ $B < A < C$

④ $C < A < B$

⑤ $C < B < A$

해설

$A > 0$, $B > 0$, $C > 0$ 이므로

A^2, B^2, C^2 의 대소를 비교한 것과 같다.

$$A^2 = (\sqrt{6} + \sqrt{7})^2 = 13 + 2\sqrt{42}$$

$$B^2 = (\sqrt{5} + 2\sqrt{2})^2 = 13 + 2\sqrt{40}$$

$$C^2 = (\sqrt{3} + \sqrt{10})^2 = 13 + 2\sqrt{30}$$

이므로 $A^2 > B^2 > C^2$ 이다.

따라서 $A > B > C$

2. $a > b > 0$ 일 때, $a^2 > b^2$ 이다. 임을 이용하여 $x > y > -1$ 일 때, $\sqrt{x+1}$, $\sqrt{y+1}$ 의 대소를 비교하면?

① $\sqrt{x+1} < \sqrt{y+1}$

② $\sqrt{x+1} \leq \sqrt{y+1}$

③ $\sqrt{x+1} > \sqrt{y+1}$

④ $\sqrt{x+1} \geq \sqrt{y+1}$

⑤ $\sqrt{x+1} = \sqrt{y+1}$

해설

$$\begin{aligned}(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{y+1})^2 &= (x+1) - (y+1) \\ &= x - y > 0\end{aligned}$$

$$\therefore \sqrt{x+1} > \sqrt{y+1}$$

3. $x > 0, y > 0$ 일 때 두 식 $\sqrt{x} + \sqrt{y}, \sqrt{2(x+y)}$ 를 바르게 비교한 것은?

① $\sqrt{x} + \sqrt{y} < \sqrt{2(x+y)}$

② $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \sqrt{2(x+y)}$

③ $\sqrt{x} + \sqrt{y} > \sqrt{2(x+y)}$

④ $\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq \sqrt{2(x+y)}$

⑤ $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2(x+y)}$

해설

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} > 0, \sqrt{2(x+y)} > 0$$

$$\begin{aligned}\text{이 때 } & (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 - \left\{ \sqrt{2(x+y)} \right\}^2 \\ &= (x + y + 2\sqrt{xy}) - (2x - 2y) \\ &= -(x - 2\sqrt{xy} + y) \\ &= -(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \leq 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{이므로 } & (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 \leq \left\{ \sqrt{2(x+y)} \right\}^2 \\ \therefore & (\sqrt{x} + \sqrt{y}) \leq \sqrt{2(x+y)} \\ & (\text{단, 등호는 } \sqrt{x} = \sqrt{y}, \text{ 즉 } x = y \text{ 일 때 성립})\end{aligned}$$

4. 다음 중 옳지 않은 것을 고르면?

① $A = \emptyset$ 이면 $n(A) = 0$

② $B = \{a, b\}$ 이면 $n(B) = 2$

③ $C = \{x \mid x \text{는 } 8 \text{의 약수}\}$ 이면 $n(C) = 4$

④ $D = \{0\}$ 이면 $n(D) = 0$

⑤ $E = \{y \mid y \text{는 } 10 \text{ 이하의 짝수}\}$ 이면 $n(E) = 5$

해설

④ $D = \{0\}$ 이면 $n(D) = 1$

5. 다음 중 옳은 것은?

① $n(\emptyset) = n(\{0\})$

② $n(\{1, 2, 4\}) - n(\{1, 4\}) = 2$

③ $n(\{4\}) = 4$

④ $n(\{x|x \text{는 } 40 \text{ 이하의 짝수}\}) = 40$

⑤ $n(\{x|x \text{는 } 2 < x < 4 \text{인 홀수}\}) = 1$

해설

① $n(\emptyset) = 0, n(\{0\}) = 1$

② $n(\{1, 2, 4\}) - n(\{1, 4\}) = 3 - 2 = 1$

③ $n(\{4\}) = 1$

④ $n(\{2, 4, 6, \dots, 40\}) = 20$

⑤ $n(\{3\}) = 1$

6. $n(\{0, 1, 2, 3\}) - n(\{1, 2, 3\})$ 의 값으로 옳은 것은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$n(\{0, 1, 2, 3\}) - n(\{1, 2, 3\}) = 4 - 3 = 1$$

7. $a > 0, b > 0$ 일 때, $\left(a + \frac{1}{b}\right) \left(b + \frac{9}{a}\right)$ 의 최솟값은?

① 6

② 9

③ 12

④ 16

⑤ 20

해설

식을 전개한 후 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하면

$$\left(a + \frac{1}{b}\right) \left(b + \frac{9}{a}\right) = ab + 9 + 1 + \frac{9}{ab}$$

$$ab + \frac{9}{ab} \geq 2 \sqrt{ab \times \frac{9}{ab}} = 2 \sqrt{9} = 6$$

$$\therefore \left(a + \frac{1}{b}\right) \left(b + \frac{9}{a}\right) \geq 10 + 6 = 16$$

8. 양수 a, b 에 대하여 $a^2 + b^2 = 1$ 을 만족할 때, $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ 의 최솟값은?

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$a^2 > 0, b^2 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{a^2b^2} = 2ab$$

(단, 등호는 $a^2 = b^2$ 일 때 성립)

그런데 $a^2 + b^2 = 1$ 이므로 $1 \geq 2ab$

$$\therefore ab \leq \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{a^2} > 0, \frac{1}{b^2} > 0$ 이므로 산술평균 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq 2\sqrt{\frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{b^2}}$$

$$\frac{2}{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

(단, 등호는 $a^2 = b^2$ 일 때 성립)

따라서 $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ 의 최솟값은 4이다.

9. 양수 a, b 에 대하여 $\frac{4a+9b}{6\sqrt{ab}}$ 의 최솟값은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$$\begin{aligned}\frac{4a+9b}{6\sqrt{ab}} &= \frac{1}{6} \left(\frac{4\sqrt{a}}{\sqrt{b}} + \frac{9\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \right) \\ &\geq \frac{1}{6} \times 2 \times \sqrt{4 \times 9} = 2\end{aligned}$$

해설

10. a, b, c 가 실수이고 $a^2 + b^2 + c^2 = 4$ 일 때 $a + b + \sqrt{2}c$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 이라 할 때, $M - m$ 의 값을 구하면?

① 4

② 6

③ 8

④ 10

⑤ 12

해설

코시-슈바르츠 부등식을 이용하면

$$\{1^2 + 1^2 + (\sqrt{2})^2\} (a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + \sqrt{2}c)^2$$

$$\therefore (a + b + \sqrt{2}c)^2 \leq 4^2$$

$$\therefore -4 \leq a + b + \sqrt{2}c \leq 4$$

따라서 최댓값은 4, 최솟값은 -4

$$\therefore M = 4, m = -4$$

$$M - m = 8$$

11. 실수 a, b, x, y 에 대하여 $a^2 + b^2 = 1$ 이고 $x^2 + y^2 = 2$ 이 성립할 때, $ax + by$ 의 최댓값은?

① 1

② $\sqrt{2}$

③ $\sqrt{3}$

④ 2

⑤ $\sqrt{6}$

해설

$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$ 에 주어진 값

$a^2 + b^2 = 1, x^2 + y^2 = 2$ 을 대입하면

$1 \times 2 \geq (ax + by)^2$ 이다.

따라서 $-\sqrt{2} \leq ax + by \leq \sqrt{2}$

$\therefore ax + by$ 의 최댓값은

$\sqrt{2}$ 이다.

12. 네 실수 a, b, c, d 에 대하여 $a+b+c+d=8, a^2+b^2+c^2+d^2=124$ 가 성립할 때, 실수 d 의 최솟값 m 과 최댓값 M 의 합 $m+M$ 의 값은?

① -7

② -3

③ 0

④ 1

⑤ 4

해설

$$a+b+c+d=8, a^2+b^2+c^2+d^2=124$$

$$a+b+c=8-d, a^2+b^2+c^2=124-d^2$$

코시-슈바르츠 부등식에서

$$(1+1+1)(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2 \text{ 이므로}$$

$$3(124-d^2) \geq (8-d)^2$$

$$372-3d^2 \geq d^2-16d+64$$

$$4d^2-16d+64-372 \leq 0$$

$$4d^2-16d-308 = d^2-4d-77 \leq 0$$

$$\therefore (d-11)(d+7) \leq 0$$

$$\therefore -7 \leq d \leq 11$$

따라서 최솟값 $m = -7$, 최댓값 $M = 11$

$$\text{이므로 } m+M = -7+11 = 4$$