1. 다음 집합 중에서 원소나열법을 조건제시법으로, 조건제시법을 원소나열법으로 바르게 나타낸 것을 모두 고르면? (정답 2 개)

① $A = \{x \mid x\text{는 1보다 작은 자연수}\} = \{0\}$

② $A = \{x \mid x\text{는 자연수}\} = \{1, 2, 3 \cdots\}$

③ $\{2, 4, 6, 8, 10 \cdots\} = \{x \mid x\text{는 10 이하의 짝수}\}$

④ $\{1, 2, 3, \cdots, 100\} = \{x \mid x\text{는 100 이하의 자연수}\}$

⑤ $\{11, 13, 15, 17, 19\} = \{x \mid x\text{는 10보다 큰 홀수}\}$

해설

① $\varnothing$
③ $\{x \mid x\text{는 짝수}\}$
⑤ $\{x \mid x\text{는 10보다 크고 20보다 작은 홀수}\}$

2. 다음 설명 중 옳은 것은?

① $n(\varnothing)=1$

② $n(\{a,\ b,\ c,\ d\})=\{4\}$

③ $A=\{1,\ 2,\ 3\}$ 이면 $n(A)=5$

④ $A=\{x\mid x$는 6의 약수$\}$이면 $n(A)=4$

⑤ $A=\{x\mid x$는 1보다 작은 자연수$\}$이면 $n(A)=\varnothing$

해설

① 공집합은 원소의 개수가 0개이므로 $n(\varnothing)=0$이다.
② $n(\{a,\ b,\ c,\ d\})=4$
③ $A=\{1,\ 2,\ 3\}$ 이면 $n(A)=3$이다.
⑤ 집합 A는 공집합이므로 $n(A)=0$이다.

3. 집합 $A = \{x \mid x$는 3보다 크고, 9보다 작은 짝수$\}$의 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 8 개

해설

$A = \{4, 6, 8\}$ 이므로 부분집합의 개수는 원소의 개수만큼 2를 곱한 값과 같으므로
$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ (개) 이다.

4. 집합 $A = \{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$ 의 부분집합 중 원소 1, 7 을 모두 포함하는 부분집합의 개수는?

① 1 개　② 2 개　③ 3 개　④ 4 개　⑤ 5 개

해설

$A = \{1, 3, 5, 7\}$ 에서
원소 1, 7 을 모두 포함하는 부분집합은
$2^{4-2} = 4$ (개) 이다.

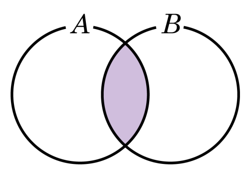
5. 두 집합 A, B에 대하여 $A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 이다. 집합 $A = \{x \mid x$는 20보다 작은 28의 약수$\}$ 일 때, 집합 B 의 원소의 개수는?

① 2 개 ② 3 개 ③ 4 개 ④ 5 개 ⑤ 6 개

해설

$A \subset B$ 이고, $B \subset A$ 이면 $A = B$ 이다.
$A = \{1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 14\}$ 이므로
$B = \{1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 14\}$
따라서 $n(B) = 5$ 이다.

6. 두 집합 $A = \{x \mid x$는 4로 나누었을 때 나머지가 3인 자연수 $\}$, $B = \{x \mid x$는 27의 약수 $\}$를 벤다이어그램으로 나타낼 때 어두운 부분에 들어갈 원소를 모두 적어라.



▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : 27

해설

$A = \{x \mid x$는 4로 나누었을 때 나머지가 3인 자연수 $\} = \{3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, \cdots\}$

$B = \left\{x | x\text{는 } 27\text{의 약수}\right\} = \{1, 3, 9, 27\}$

어두운 부분은 두 집합 A, B 의 교집합이므로

$A \cap B = \{3, 27\}$

7. 두 집합 $A = \{2,\ 8,\ a\}$,$B = \{4,\ a+4,\ b+1\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{-2,\ 2\}$ 일 때, a, b 의 값을 각각 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $a = -2$

▷ 정답: $b = -3$

해설

$A \cap B = \{-2,\ 2\}$ 이므로
$A = \{2,\ 8,\ a\}$ 에서 $a = -2$
$B = \{4,\ 2,\ b+1\}$ 에서 $b+1 = -2$, $b = -3$
$\therefore a = -2,\ b = -3$

8. 전체집합 $U = \{1, 2, 4, 6, 8, 10\}$ 의 두 부분집합 $A = \{x | x$는 8의 약수$\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ 에 대하여 다음 중 옳은 것은?

① $A \cap B = \{2, 6\}$

② $A - B^c = \{2\}$

③ $A - B = \{8\}$

④ $A^c - B^c = \{6\}$

⑤ $A \cup B = \{1, 2, 4, 8\}$

해설

$A = \{1, 2, 4, 8\}$ 이므로

① $A \cap B = \{2, 4\}$

② $A - B^c = \{2, 4\}$

③ $A - B = \{1, 8\}$

⑤ $A \cup B = \{1, 2, 4, 6, 8\}$ 이다.

9. 임의의 집합 A, B, C에 대하여, 다음 중에서 $A-(B-C)$와 같은 집합은 ?

① $(A \cup B) - (A \cup C)$

② $(A - B) - (A - C)$

③ $(A \cap B) \cup (A - C)$

④ $(A - B) \cup (A \cap C)$

⑤ $(A \cup B) - (A \cap C)$

해설

$A-(B-C) = A \cap (B \cap C^c)^c = A \cap (B^c \cup C) = (A \cap B^c) \cup (A \cap C)$
$= (A - B) \cup (A \cap C)$

10. 집합 $A=\{1,3,x,6\}$, $B=\{7,y+1,y+2,8\}$ 이고 $A\cap B=\{5,6\}$ 라고 할 때, $(A-B)\cup(B-A)$ 는?

① $\{1,3\}$　② $\{1,5\}$　③ $\{1,3,5\}$
④ $\{1,3,7,8\}$　⑤ $\{1,3,7,9\}$

해설

$A\cap B=\{5,6\}$ 이므로 $x=5, A=\{1,3,5,6\}$ 이다.
(1) $y+2=5$ 일 경우는 조건에 맞지 않는다.
(2) $y+1=5$ 일 경우, $A\cap B=\{5,6\}$ 이 되어 조건에 맞는다 .
따라서 $A=\{1,3,5,6\}$, $B=\{5,6,7,8\}$ 이 되어
$(A-B)\cup(B-A)=\{1,3\}\cup\{7,8\}=\{1,3,7,8\}$ 이다.

11. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B에 대하여 $n(U) = 36, n(A - B) = 15, n(B) = 15, n(A \cap B) = 3$ 일 때, $n((A \cup B)^c)$ 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$n(A) - n(A \cap B) = n(A - B)$ 이므로

$n(A) = n(A \cap B) + n(A - B)$

$= 3 + 15 = 18$ 이다.

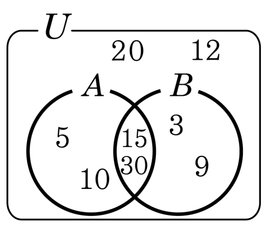
따라서 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$= 18 + 15 - 3 = 33 - 3$

$= 30$ 이다.

$n((A \cup B)^c) = n(U) - n(A \cup B) = 36 - 30 = 6$ 이다.

12. 다음 벤 다이어그램에 대한 설명으로 옳지 않은 것은?



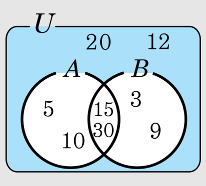
① $n(U) = 8$　　② $n(A - B) = 2$

③ $n(B - A) = 2$　　④ $n((A \cup B)^c) = 3$

⑤ $n(A^c) = 4$

해설

④ $(A \cup B)^c$ 을 색칠하면 다음 부분과 같다.



$\therefore\ n((A \cup B)^c) = 2$

13. 다음은 한샘이가 수학 문제를 푼 것이다. 밑줄 친 부분에서 <u>틀린</u> 것은?

> [문제] 두 집합 A, B 에 대하여 $A = \{1,\ 2,\ 5,\ 6\}$, $B = \{2,\ 5,\ 7\}$ 일 때, $n(A - B)$ 를 구하여라.
> [풀 이] ㉠ $\underline{n(A) = 4}$, ㉡ $\underline{n(B) = 3}$ 이므로 ㉢ $\underline{n(A - B) = n(A) - n(B) = 1}$ 이다.

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉢

해설

$A \cap B = \{2,\ 5\}$

$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 4 - 2 = 2$

틀린 곳은 ㉢이다.

14. 두 조건 $p : 0 < x < 3$, $q : -1 < x < 2$ 에 대하여 '$\sim p$ 또는 q' 의 부정은?

① $0 < x < 2$　　② $-1 < x < 3$

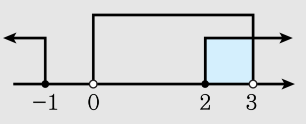
③ $x \le -1$ 또는 $x > 0$　　④ $-1 \le x < 3$

⑤ $2 \le x < 3$

해설

'$\sim p$ 또는 q' 의 부정은 'p 이고 $\sim q$' 이므로

$p : 0 < x < 3$, $\sim q : x \le -1$ 또는 $x \ge 2$ 에서



따라서, '$\sim p$ 또는 q' 의 부정은 $2 \le x < 3$ 이다.

15. 다음<보기>의 명제 중 참인 것의 개수는?

보기

㉠ $x^2 < 1$이면 $x < 1$이다.

㉡ $x \neq 1$이면 $x^2 \neq 1$이다.

㉢ a, b가 무리수일 때, $a+b$, ab중 적어도 하나는 무리수이다.

㉣ ab가 유리수 이면 $a+b$도 유리수이다.

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

㉠ $x^2 - 1 < 0 \leftrightarrow -1 < x < 1$ $P = \{x| -1 < x < 1\}$, $Q = \{x|x < 1\}$ 라 할 때, $P \subset Q$ 이므로 참
㉡ 반례 : $x = -1$ 일 때, 거짓
㉢ 반례 : $a = \sqrt{2}$　$b = -\sqrt{2}$ 일 때, $a+b = 0, ab = -2$ 이므로 거짓
㉣ 반례 : $a = \sqrt{3} + \sqrt{2}, b = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ 일 때, $ab = 1$(유리수) , $a+b = 2\sqrt{3}$(무리수) 이므로 거짓

16. 다음 중 명제 「$x+y \geq 2$ 이고 $xy \geq 1$ 이면, $x \geq 1$ 이고 $y \geq 1$ 이다.」가 거짓임을 보이는 반례는?

① $x=1,\ y=\frac{1}{2}$ ② $x=100,\ y=\frac{1}{2}$

③ $x=1,\ y=1$ ④ $x=2,\ y=4$

⑤ $x=-1,\ y=-5$

해설

가정을 만족시키면서 결론을 만족시키지 않는 것을 고르면 된다.
따라서 ②가 올바른 반례이다

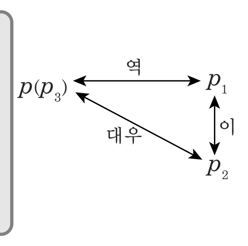
17. 명제 p 의 역을 p_1 , p_1 의 이를 p_2 , p_2 의 대우를 p_3 이라고 하자. 다음 중 명제 p 와 같은 것은?

① p_2 의 역　　② p_2 의 이　　③ p_2 의 대우

④ p_3 의 역　　⑤ p_3 의 대우

해설

p, p_1, p_2, p_3 의 관계는 그림을 그려서 생각하면 편리하다. 예를 들어 명제를 $p \to q$ 를 p 로 두면 p_1 은 $q \to p$ 이고, p_2 는 $\sim q \to \sim p$ 이고, p_3 는 $p \to q$ 이다.



18. 두 조건 $p : x^2 - ax - 6 > 0$, $q : x^2 + 2x - 3 \neq 0$에 대하여 $p \rightarrow q$가 참일 때 a의 최댓값, 최솟값의 합은?

① -7　② -6　③ -5　④ -4　⑤ -3

해설

$p \rightarrow q$는 $\sim q \rightarrow \sim p$와 동치임을 이용

$\therefore x^2 + 2x - 3 = 0$이면 $x^2 - ax - 6 \leq 0$이다.

$x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1) = 0$,

$x = -3,\ 1$이면 $x^2 - ax - 6 \leq 0$이다.

1) $x = -3\ : 9 + 3a - 6 \leq 0 \ \rightarrow\ a \leq -1$

2) $x = 1\ : 1 - a - 6 \leq 0 \ \rightarrow\ a \geq -5$

$\therefore\ -5 \leq a \leq -1$

따라서, $-5 + (-1) = -6$

19. 어떤 건물에 불이 나서 경찰이 조사하였더니 누군가 방화한 것이고, '방화범은 반드시 건물 안에 있었다.'라는 사실을 알아내었으며 불이 난 시간에 건물 안에 있었던 용의자를 잡아 범인으로 단정하였다. 이러한 단정은 반드시 옳은가? 또, 그 근거를 논리적으로 옳게 설명한 것은?

① 그렇다. 명제 $p \rightarrow q$가 참이면 $\sim q \rightarrow p$도 반드시 참이다.

② 그렇다. 명제 $p \rightarrow q$가 참이라 하여 $q \rightarrow p$가 반드시 참이 되는 것은 아니다.

③ 아니다. 명제 $p \rightarrow q$가 참이면 $\sim q \rightarrow \sim p$도 반드시 참이다.

④ 아니다. 명제 $p \rightarrow q$가 참이라 하여 $q \rightarrow p$가 반드시 참이 되는 것은 아니다.

⑤ 아니다. 명제 $p \rightarrow q$가 참이면 $\sim q \rightarrow \sim p$는 반드시 참이다.

해설

'방화범은 반드시 건물 안에 있었다.'가 참이라고 해서 '건물 안에 있었던 사람이 방화범이다.'도 참이라고 할 수는 없다. 즉, 명제 $p \rightarrow q$가 참이라 하여 그 역인 $q \rightarrow p$가 반드시 참인 것은 아니다.

20. $|x-3| \le 7$ 은 $|x-2| \le a$ 이기 위한 필요조건이고 $x \le b$ 이기 위한 충분조건일 때, a 의 최댓값과 b 의 최솟값의 합은?(단, $b > 0$)

① 16　　② 18　　③ 20　　④ 22　　⑤ 24

해설

$|x-3| \le 7$ 을 만족하는 집합을 P,
$|x-2| \le a$ 을 만족하는 집합을 Q,
$x \le b$ 를 만족하는 집합을 R 이라 하면,
$P \subset R$ 이므로 $Q \subset P$
즉 $Q \subset P \subset R$ 이다.
따라서 Q 는 $-a \le x-2 \le a$ 에서
$2-a \le x \le a+2$, P 는 $-4 \le x \le 10$,
R 은 $x \le b$ 이므로
$2-a \ge -4$, $a+2 \le 10$ 이므로
$a \le 6$, $a \le 8$ 에서 $a \le 6$ 이므로
a 의 최댓값은 6,
또한 $b \le 10$ 이므로 b 의 최솟값은 10
따라서 a 의 최댓값과 b 의 최솟값의 합은 16

21. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 p, q 는 각각 r 이기 위한 충분조건, s 는 r 이기 위한 필요조건, q 는 s 이기 위한 필요조건이다. 이때, p 는 q 이기 위한 어떤 조건인지를 말하여라.

▶ 답: ______ 조건

▷ 정답: 충분조건

해설

p 는 r 이기 위한 충분조건이므로 $p \Rightarrow r$
q 는 r 이기 위한 충분조건이므로 $q \Rightarrow r$
s 는 r 이기 위한 필요조건이므로 $r \Rightarrow s$
q 는 s 이기 위한 필요조건이므로 $s \Rightarrow q$
따라서, $p \Rightarrow r \Rightarrow s \Rightarrow q$
$\therefore\ p \Rightarrow q$
그러나 $q \Rightarrow p$ 인지는 알 수 없다.
$\therefore p$는 q이기 위한 충분조건이다.

22. 두 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 3\}$ 에 대하여 $A \cap X = X$, $(A \cap B) \cup X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는?

① 4개 ② 6개 ③ 8개 ④ 12개 ⑤ 16개

해설

집합 X 는 원소 $2, 3$ 을 반드시 포함하는 집합 A 의 부분집합이다.
$\therefore\ n(X) = 2^{5-2} = 2^3 = 8$ (개)

23. 우리 반 학생 50 명 중에서 수학을 좋아하는 학생은 35 명, 과학을 좋아하는 학생은 25 명일 때, 두 과목 모두 좋아하는 학생 수의 최솟값과 최댓값의 합을 구하여라.

▶ 답 : 명

▷ 정답 : 35 명

해설

문제에서 $A \cup B$ 이 주어지고 있다. 우리 반 학생 50 명이 $A \cup B$ 이다.
수학을 좋아하는 학생을 집합 A 라고 하고, 과학을 좋아하는 학생을 집합 B 라고 한다.
수학, 과학을 모두 좋아하는 학생은 $A \cap B$ 가 된다.
$A \cap B$ 의 최솟값과 최댓값을 구해 보자.
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
$50 = 35 + 25 - x$
x 의 최솟값은 10 명이다.
최댓값은 과학을 좋아하는 학생이 수학을 좋아하는 학생에 포함될 때 성립한다.
그러므로 x 의 최댓값은 25 명이다.
최솟값과 최댓값의 합은 35 명이다.

24. 다음 중 항상 성립하는 부등식이 아닌 것은?(a, b, c 는 모두 양수)

① $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

② $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}$

③ $a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$

④ $a^2 - 1 > a$

⑤ $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$

해설

$a > 0, b > 0, c > 0$

① $\dfrac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \dfrac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$

$= \dfrac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} \geq 0$

$\therefore \dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (등호 성립조건은 $a = b$)

② $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - (\sqrt{a+b})^2$

$= a + b + 2\sqrt{ab} - (a+b) = 2\sqrt{ab} \geq 0$

$\therefore \sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}$(단 $a = b$ 일때 등호성립)

③ $a^3 + b^3 - ab(a+b)$

$= (a+b)(a^2 - ab + b^2) - ab(a+b)$

$= (a+b)(a^2 - 2ab + b^2)$

$= (a+b)(a-b)^2 \geq 0$

$\therefore a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$ (등호 성립조건은 $a = b$)

④ (반례) $a = 1$

$1^2 - 1 > 1, 0 > 1$

$\therefore$ 거짓

⑤ a, b, c 가 모두 양수이므로

$a + b \geq 2\sqrt{ab}$ (등호 성립조건은 $a = b$)

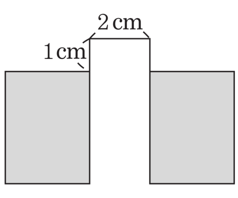
$b + c \geq 2\sqrt{bc}$ (등호 성립조건은 $b = c$)

$c + a \geq 2\sqrt{ca}$ (등호 성립조건은 $c = a$)

$\therefore (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8\sqrt{a^2b^2c^2} = 8abc$

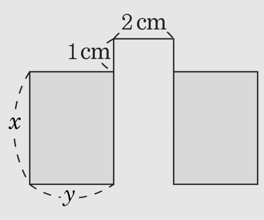
(등호 성립조건은 $a = b = c$)

25. 폭이 200cm 인 긴 양철판을 구부려서 두 줄기로 물이 흘러가도록 하였다. 단면이 아래 그림과 같이 대칭인 모양으로 물이 가장 많이 흘러갈 수 있도록 했을 때, 물이 흘러가는 단면의 최대 넓이에 가장 가까운 값은?



① $1000\,\text{cm}^2$ ② $1200\,\text{cm}^2$ ③ $1600\,\text{cm}^2$
④ $2000\,\text{cm}^2$ ⑤ $2400\,\text{cm}^2$

해설



물이 흐르는 단면 중 한 쪽 직사각형의 가로를 y cm, 세로를 x cm 라고 하면

$4x + 2y + 2 + 1 \times 2 = 200$ 에서

$4x + 2y = 196$ $x > 0,\ y > 0$ 이므로

(산술평균) ≥(기하평균) 에서

$\frac{4x + 2y}{2} \geq \sqrt{4x \cdot 2y} = 2\sqrt{2}\sqrt{xy}$

$\sqrt{xy} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{196}{2}$

$\therefore\ xy \leq \frac{49^2}{2},\ 2xy \leq 49^2,\ 2xy \leq 2401$

따라서 단면의 최대 넓이는 $2xy = 2401$

26. 길이가 10인 쇠파이프를 n등분(같은 크기)으로 잘라 다른 장소로 운반하려고 한다. 길이가 x인 쇠파이프 1개를 운반하는 데 드는 비용이 $250x^2$ 원이고 쇠파이프를 한 번 자를 때 드는 비용이 1000원이라 할 때, 이 쇠파이프를 잘라서 운반하는 데 드는 최소비용은?

① 6000원 ② 7000원 ③ 8000원

④ 9000원 ⑤ 10000원

해설

쇠파이프 한 개의 길이 : $\dfrac{10}{n}$

(총 비용) $= 250\left(\dfrac{10}{n}\right)^2 \times n + 1000(n-1)$

$= \dfrac{25000}{n} + 1000n - 1000$

$\geq 2\sqrt{\dfrac{25000}{n} \times 1000n} - 1000$

$= 2 \times 5000 - 1000$

$= 10000 - 1000 = 9000$