

1. 다음 집합 중에서 원소나열법을 조건제시법으로, 조건제시법을 원소나열법으로 바르게 나타낸 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $A = \{x \mid x \text{는 } 1 \text{보다 작은 자연수}\} = \{0\}$

② $A = \{x \mid x \text{는 자연수}\} = \{1, 2, 3, \dots\}$

③ $\{2, 4, 6, 8, 10, \dots\} = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 짝수}\}$

④ $\{1, 2, 3, \dots, 100\} = \{x \mid x \text{는 } 100 \text{ 이하의 자연수}\}$

⑤ $\{11, 13, 15, 17, 19\} = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{보다 큰 홀수}\}$

해설

① $\emptyset$

③ $\{x \mid x \text{는 짝수}\}$

⑤ $\{x \mid x \text{는 } 10 \text{보다 크고 } 20 \text{보다 작은 홀수}\}$

2. 다음 설명 중 옳은 것은?

① $n(\emptyset) = 1$

② $n(\{a, b, c, d\}) = \{4\}$

③ $A = \{1, 2, 3\}$ 이면 $n(A) = 5$

④ $A = \{x \mid x \text{는 } 6 \text{의 약수}\}$ 이면 $n(A) = 4$

⑤ $A = \{x \mid x \text{는 } 1 \text{보다 작은 자연수}\}$ 이면 $n(A) = \emptyset$

해설

① 공집합은 원소의 개수가 0개이므로 $n(\emptyset) = 0$ 이다.

② $n(\{a, b, c, d\}) = 4$

③ $A = \{1, 2, 3\}$ 이면 $n(A) = 3$ 이다.

⑤ 집합 A 는 공집합이므로 $n(A) = 0$ 이다.

3. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 3 \text{보다 크고, } 9 \text{보다 작은 짝수}\}$ 의 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 8 개

해설

$A = \{4, 6, 8\}$ 이므로 부분집합의 개수는 원소의 개수만큼 2를 곱한 값과 같으므로

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8 \text{ (개) 이다.}$$

4. 집합 $A = \{1, 3, 5, 7\}$ 의 부분집합 중 원소 1, 7을 모두 포함하는 부분집합의 개수는?

① 1 개

② 2 개

③ 3 개

④ 4 개

⑤ 5 개

해설

$A = \{1, 3, 5, 7\}$ 에서

원소 1, 7을 모두 포함하는 부분집합은

$2^{4-2} = 4$ (개)이다.

5. 두 집합 A, B 에 대하여 $A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 이다. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 20 \text{보다 작은 } 28 \text{의 약수}\}$ 일 때, 집합 B 의 원소의 개수는?

① 2 개

② 3 개

③ 4 개

④ 5 개

⑤ 6 개

해설

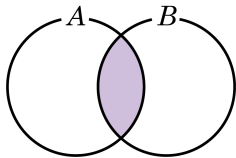
$A \subset B$ 이고, $B \subset A$ 이면 $A = B$ 이다.

$A = \{1, 2, 4, 7, 14\}$ 이므로

$B = \{1, 2, 4, 7, 14\}$

따라서 $n(B) = 5$ 이다.

6. 두 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 4 \text{로 나누었을 때 나머지가 } 3 \text{인 자연수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 27 \text{의 약수}\}$ 를 벤다이어그램으로 나타낼 때 어두운 부분에 들어갈 원소를 모두 적어라.



▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : 27

해설

$$A = \{x \mid x \text{는 } 4 \text{로 나누었을 때 나머지가 } 3 \text{인 자연수}\} = \{3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, \dots\}$$

$$B = \{x \mid x \text{는 } 27 \text{의 약수}\} = \{1, 3, 9, 27\}$$

어두운 부분은 두 집합 A, B 의 교집합이므로

$$A \cap B = \{3, 27\}$$

7. 두 집합 $A = \{2, 8, a\}$, $B = \{4, a+4, b+1\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{-2, 2\}$ 일 때, a, b 의 값을 각각 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -2$

▷ 정답 : $b = -3$

해설

$A \cap B = \{-2, 2\}$ 이므로

$A = \{2, 8, a\}$ 에서 $a = -2$

$B = \{4, 2, b+1\}$ 에서 $b+1 = -2, b = -3$

$\therefore a = -2, b = -3$

8. 전체 집합 $U = \{1, 2, 4, 6, 8, 10\}$ 의 두 부분 집합 $A = \{x | x \text{는 } 8 \text{의 약수}\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ 에 대하여 다음 중 옳은 것은?

① $A \cap B = \{2, 6\}$

② $A - B^c = \{2\}$

③ $A - B = \{8\}$

④ $A^c - B^c = \{6\}$

⑤ $A \cup B = \{1, 2, 4, 8\}$

해설

$A = \{1, 2, 4, 8\}$ 이므로

① $A \cap B = \{2, 4\}$

② $A - B^c = \{2, 4\}$

③ $A - B = \{1, 8\}$

⑤ $A \cup B = \{1, 2, 4, 6, 8\}$ 이다.

9. 임의의 집합 A, B, C 에 대하여, 다음 중에서 $A - (B - C)$ 와 같은 집합은 ?

① $(A \cup B) - (A \cup C)$

② $(A - B) - (A - C)$

③ $(A \cap B) \cup (A - C)$

④ $(A - B) \cup (A \cap C)$

⑤ $(A \cup B) - (A \cap C)$

해설

$$\begin{aligned} A - (B - C) &= A \cap (B \cap C^c)^c = A \cap (B^c \cup C) = (A \cap B^c) \cup (A \cap C) \\ &= (A - B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

10. 집합 $A = \{1, 3, x, 6\}$, $B = \{7, y + 1, y + 2, 8\}$ 이고 $A \cap B = \{5, 6\}$ 라고 할 때, $(A - B) \cup (B - A)$ 는?

① $\{1, 3\}$

② $\{1, 5\}$

③ $\{1, 3, 5\}$

④ $\{1, 3, 7, 8\}$

⑤ $\{1, 3, 7, 9\}$

해설

$A \cap B = \{5, 6\}$ 이므로 $x = 5, A = \{1, 3, 5, 6\}$ 이다.

(1) $y + 2 = 5$ 일 경우는 조건에 맞지 않는다.

(2) $y + 1 = 5$ 일 경우, $A \cap B = \{5, 6\}$ 이 되어 조건에 맞는다.

따라서 $A = \{1, 3, 5, 6\}, B = \{5, 6, 7, 8\}$ 이 되어

$(A - B) \cup (B - A) = \{1, 3\} \cup \{7, 8\} = \{1, 3, 7, 8\}$ 이다.

11. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $n(U) = 36, n(A - B) = 15, n(B) = 15, n(A \cap B) = 3$ 일 때, $n((A \cup B)^c)$ 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$$n(A) - n(A \cap B) = n(A - B) \text{ 이므로}$$

$$n(A) = n(A \cap B) + n(A - B)$$

$$= 3 + 15 = 18 \text{ 이다.}$$

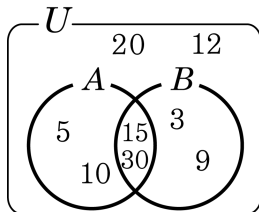
$$\text{따라서 } n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$= 18 + 15 - 3 = 33 - 3$$

$$= 30 \text{ 이다.}$$

$$n((A \cup B)^c) = n(U) - n(A \cup B) = 36 - 30 = 6 \text{ 이다.}$$

12. 다음 벤 다이어그램에 대한 설명으로 옳지 않은 것은?



① $n(U) = 8$

② $n(A - B) = 2$

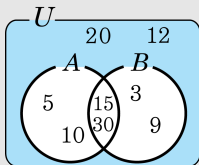
③ $n(B - A) = 2$

④ $n((A \cup B)^c) = 3$

⑤ $n(A^c) = 4$

해설

④ $(A \cup B)^c$ 을 색칠하면 다음 부분과 같다.



$\therefore n((A \cup B)^c) = 2$

13. 다음은 한샘이가 수학 문제를 푼 것이다. 밑줄 친 부분에서 틀린 것은?

[문제] 두 집합 A, B 에 대하여 $A = \{1, 2, 5, 6\}$, $B = \{2, 5, 7\}$ 일 때, $n(A - B)$ 를 구하여라.

[풀 이] $\textcircled{㉠} n(A) = 4$, $\textcircled{㉡} n(B) = 3$ 이 므 로
 $\textcircled{㉢} n(A - B) = n(A) - n(B) = 1$ 이다.

▶ 답:

▷ 정답: $\textcircled{㉢}$

해설

$$A \cap B = \{2, 5\}$$

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 4 - 2 = 2$$

틀린 곳은 $\textcircled{㉢}$ 이다.

14. 두 조건 $p : 0 < x < 3$, $q : -1 < x < 2$ 에 대하여 ' $\sim p$ 또는 q '의 부정은?

① $0 < x < 2$

② $-1 < x < 3$

③ $x \leq -1$ 또는 $x > 0$

④ $-1 \leq x < 3$

⑤ $2 \leq x < 3$

해설

' $\sim p$ 또는 q '의 부정은 ' p 이고 $\sim q$ '이므로

$p : 0 < x < 3$, $\sim q : x \leq -1$ 또는 $x \geq 2$ 에서



따라서, ' $\sim p$ 또는 q '의 부정은 $2 \leq x < 3$ 이다.

15. 다음 <보기>의 명제 중 참인 것의 개수는?

보기

㉠ $x^2 < 1$ 이면 $x < 1$ 이다.

㉡ $x \neq 1$ 이면 $x^2 \neq 1$ 이다.

㉢ a, b 가 무리수일 때, $a + b$, ab 중 적어도 하나는 무리수이다.

㉣ ab 가 유리수이면 $a + b$ 도 유리수이다.

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

㉠ $x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$ $P = \{x | -1 < x < 1\}$, $Q = \{x | x < 1\}$
라 할 때, $P \subset Q$ 이므로 참

㉡ 반례 : $x = -1$ 일 때, 거짓

㉢ 반례 : $a = \sqrt{2}$ $b = -\sqrt{2}$ 일 때, $a + b = 0$, $ab = -2$ 이므로
거짓

㉣ 반례 : $a = \sqrt{3} + \sqrt{2}$, $b = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ 일 때, $ab = 1$ (유리수),
 $a + b = 2\sqrt{3}$ (무리수) 이므로 거짓

16. 다음 중 명제 「 $x + y \geq 2$ 이고 $xy \geq 1$ 이면, $x \geq 1$ 이고 $y \geq 1$ 이다.」가 거짓임을 보이는 반례는?

① $x = 1, y = \frac{1}{2}$

② $x = 100, y = \frac{1}{2}$

③ $x = 1, y = 1$

④ $x = 2, y = 4$

⑤ $x = -1, y = -5$

해설

가정을 만족시키면서 결론을 만족시키지 않는 것을 고르면 된다.
따라서 ②가 올바른 반례이다

17. 명제 p 의 역을 p_1 , p_1 의 이를 p_2 , p_2 의 대우를 p_3 이라고 하자. 다음 중 명제 p 와 같은 것은?

① p_2 의 역

② p_2 의 이

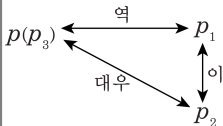
③ p_2 의 대우

④ p_3 의 역

⑤ p_3 의 대우

해설

p, p_1, p_2, p_3 의 관계는 그림을 그려서 생각하면 편리하다. 예를 들어 명제를 $p \rightarrow q$ 를 p 로 두면 p_1 은 $q \rightarrow p$ 이고, p_2 는 $\sim q \rightarrow \sim p$ 이고, p_3 는 $p \rightarrow q$ 이다.



18. 두 조건 $p : x^2 - ax - 6 > 0$, $q : x^2 + 2x - 3 \neq 0$ 에 대하여 $p \rightarrow q$ 가 참일 때 a 의 최댓값, 최솟값의 합은?

① -7

② -6

③ -5

④ -4

⑤ -3

해설

$p \rightarrow q$ 는 $\sim q \rightarrow \sim p$ 와 동치임을 이용

$\therefore x^2 + 2x - 3 = 0$ 이면 $x^2 - ax - 6 \leq 0$ 이다.

$$x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1) = 0,$$

$x = -3, 1$ 이면 $x^2 - ax - 6 \leq 0$ 이다.

1) $x = -3 : 9 + 3a - 6 \leq 0 \rightarrow a \leq -1$

2) $x = 1 : 1 - a - 6 \leq 0 \rightarrow a \geq -5$

$$\therefore -5 \leq a \leq -1$$

따라서, $-5 + (-1) = -6$

19. 어떤 건물에 불이 나서 경찰이 조사하였더니 누군가 방화한 것이고, ‘방화범은 반드시 건물 안에 있었다.’라는 사실을 알아내었으며 불이 난 시간에 건물 안에 있었던 용의자를 잡아 범인으로 단정하였다. 이러한 단정은 반드시 옳은가? 또, 그 근거를 논리적으로 옳게 설명한 것은?

- ① 그렇다. 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이면 $\sim q \rightarrow p$ 도 반드시 참이다.
- ② 그렇다. 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이라 하여 $q \rightarrow p$ 가 반드시 참이 되는 것은 아니다.
- ③ 아니다. 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이면 $\sim q \rightarrow \sim p$ 도 반드시 참이다.
- ④ 아니다. 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이라 하여 $q \rightarrow p$ 가 반드시 참이 되는 것은 아니다.
- ⑤ 아니다. 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이면 $\sim q \rightarrow \sim p$ 는 반드시 참이다.

해설

‘방화범은 반드시 건물 안에 있었다.’가 참이라고 해서 ‘건물 안에 있었던 사람이 방화범이다.’도 참이라고 할 수는 없다. 즉, 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이라 하여 그 역인 $q \rightarrow p$ 가 반드시 참인 것은 아니다.

20. $|x-3| \leq 7$ 은 $|x-2| \leq a$ 이기 위한 필요조건이고 $x \leq b$ 이기 위한 충분조건일 때, a 의 최댓값과 b 의 최솟값의 합은?(단, $b > 0$)

- ① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

해설

$|x-3| \leq 7$ 을 만족하는 집합을 P ,
 $|x-2| \leq a$ 을 만족하는 집합을 Q ,
 $x \leq b$ 를 만족하는 집합을 R 이라 하면,

$P \subset R$ 이므로 $Q \subset P$

즉 $Q \subset P \subset R$ 이다.

따라서 Q 는 $-a \leq x-2 \leq a$ 에서
 $2-a \leq x \leq a+2$, P 는 $-4 \leq x \leq 10$,

R 은 $x \leq b$ 이므로

$2-a \geq -4$, $a+2 \leq 10$ 이므로

$a \leq 6$, $a \leq 8$ 에서 $a \leq 6$ 이므로

a 의 최댓값은 6,

또한 $b \leq 10$ 이므로 b 의 최솟값은 10

따라서 a 의 최댓값과 b 의 최솟값의 합은 16

21. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 p, q 는 각각 r 이기 위한 충분조건, s 는 r 이기 위한 필요조건, q 는 s 이기 위한 필요조건이다. 이때, p 는 q 이기 위한 어떤 조건인지를 말하여라.



답 :

조건



정답 : 충분조건

해설

p 는 r 이기 위한 충분조건이므로 $p \Rightarrow r$

q 는 r 이기 위한 충분조건이므로 $q \Rightarrow r$

s 는 r 이기 위한 필요조건이므로 $r \Rightarrow s$

q 는 s 이기 위한 필요조건이므로 $s \Rightarrow q$

따라서, $p \Rightarrow r \Rightarrow s \Rightarrow q$

$\therefore p \Rightarrow q$

그러나 $q \Rightarrow p$ 인지는 알 수 없다.

$\therefore p$ 는 q 이기 위한 충분조건이다.

22. 두 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 3\}$ 에 대하여 $A \cap X = X$, $(A \cap B) \cup X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는?

① 4개

② 6개

③ 8개

④ 12개

⑤ 16개

해설

집합 X 는 원소 2, 3을 반드시 포함하는 집합 A 의 부분집합이다.
 $\therefore n(X) = 2^{5-2} = 2^3 = 8$ (개)

23. 우리 반 학생 50 명 중에서 수학을 좋아하는 학생은 35 명, 과학을 좋아하는 학생은 25 명일 때, 두 과목 모두 좋아하는 학생 수의 최솟값과 최댓값의 합을 구하여라.



답 :

명



정답 : 35 명

해설

문제에서 $A \cup B$ 이 주어지고 있다. 우리 반 학생 50 명이 $A \cup B$ 이다.

수학을 좋아하는 학생을 집합 A 라고 하고, 과학을 좋아하는 학생을 집합 B 라고 한다.

수학, 과학을 모두 좋아하는 학생은 $A \cap B$ 가 된다.

$A \cap B$ 의 최솟값과 최댓값을 구해 보자.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$50 = 35 + 25 - x$$

x 의 최솟값은 10명이다.

최댓값은 과학을 좋아하는 학생이 수학을 좋아하는 학생에 포함될 때 성립한다.

그러므로 x 의 최댓값은 25명이다.

최솟값과 최댓값의 합은 35명이다.

24. 다음 중 항상 성립하는 부등식이 아닌 것은? (a, b, c 는 모두 양수)

① $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

② $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}$

③ $a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$

④ $a^2 - 1 > a$

⑤ $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$

해설

$a > 0, b > 0, c > 0$

① $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$
 $= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0$

$\therefore \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (등호 성립조건은 $a=b$)

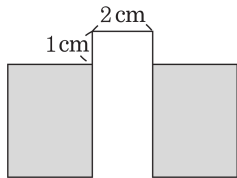
② $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - (\sqrt{a+b})^2$
 $= a+b+2\sqrt{ab} - (a+b) = 2\sqrt{ab} \geq 0$
 $\therefore \sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}$ (단 $a=b$ 일때 등호성립)

③ $a^3 + b^3 - ab(a+b)$
 $= (a+b)(a^2 - ab + b^2) - ab(a+b)$
 $= (a+b)(a^2 - 2ab + b^2)$
 $= (a+b)(a-b)^2 \geq 0$
 $\therefore a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$ (등호 성립조건은 $a=b$)

④ (반례) $a=1$
 $1^2 - 1 > 1, 0 > 1$
 $\therefore$ 거짓

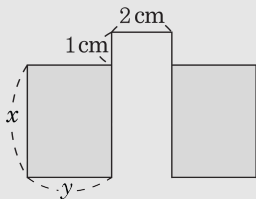
⑤ a, b, c 가 모두 양수이므로
 $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ (등호 성립조건은 $a=b$)
 $b+c \geq 2\sqrt{bc}$ (등호 성립조건은 $b=c$)
 $c+a \geq 2\sqrt{ca}$ (등호 성립조건은 $c=a$)
 $\therefore (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8\sqrt{a^2b^2c^2} = 8abc$
 (등호 성립조건은 $a=b=c$)

25. 폭이 200cm인 긴 양철판을 구부려서 두 줄기로 물이 흘러가도록 하였다. 단면이 아래 그림과 같이 대칭인 모양으로 물이 가장 많이 흘러갈 수 있도록 했을 때, 물이 흘러가는 단면의 최대 넓이에 가장 가까운 값은?



- ① 1000 cm² ② 1200 cm² ③ 1600 cm²
 ④ 2000 cm² ⑤ 2400 cm²

해설



물이 흐르는 단면 중 한 쪽 직사각형의 가로를 y cm, 세로를 x cm 라고 하면

$$4x + 2y + 2 + 1 \times 2 = 200 \text{ 에서}$$

$$4x + 2y = 196, x > 0, y > 0 \text{ 이므로}$$

(산술평균) $\geq$ (기하평균) 에서

$$\frac{4x + 2y}{2} \geq \sqrt{4x \cdot 2y} = 2\sqrt{2}\sqrt{xy}$$

$$\sqrt{xy} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{196}{2}$$

$$\therefore xy \leq \frac{49^2}{2}, 2xy \leq 49^2, 2xy \leq 2401$$

따라서 단면의 최대 넓이는 $2xy = 2401$

26. 길이가 10 인 쇄파이프를 n 등분 (같은 크기) 으로 잘라 다른 장소로 운반하려고 한다. 길이가 x 인 쇄파이프 1 개를 운반하는 데 드는 비용이 $250x^2$ 원이고 쇄파이프를 한 번 자를 때 드는 비용이 1000 원이라 할 때, 이 쇄파이프를 잘라서 운반하는 데 드는 최소비용은?

① 6000 원

② 7000 원

③ 8000 원

④ 9000 원

⑤ 10000 원

해설

쇄파이프 한 개의 길이 : $\frac{10}{n}$

$$(\text{총 비용}) = 250 \left(\frac{10}{n} \right)^2 \times n + 1000(n-1)$$

$$= \frac{25000}{n} + 1000n - 1000$$

$$\geq 2 \sqrt{\frac{25000}{n} \times 1000n} - 1000$$

$$= 2 \times 5000 - 1000$$

$$= 10000 - 1000 = 9000$$