

1. 두 복소수 $z_1 = a + (3b - 1)i$, $z_2 = (b + 1) - 5i$ 에 대하여 $z_1 = \bar{z}_2$ 가 성립할 때, 실수 a, b 에 대하여 $a + b$ 의 값은?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

$a + (3b - 1)i = (b + 1) + 5i$ 에서

$$\begin{cases} a = b + 1 \\ 3b - 1 = 5 \end{cases} \quad \text{이므로 연립하면}$$

$$a = 3, b = 2$$

$$\therefore a + b = 5$$

2. 다음 이차함수 중 최솟값을 갖는 것은?

① $y = -2x^2 + 1$

② $y = -x^2 + x + 1$

③ $y = -(x - 1)^2 + 4$

④ $y = 1 - x^2$

⑤ $y = (x - 1)(x + 2)$

해설

그래프가 아래로 볼록해야 최솟값을 가진다.

3. 함수 $y = -x^2 - 2x + 5$ ($-2 \leq x \leq 2$)의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M + m$ 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$y = -x^2 - 2x + 5 = -(x^2 + 2x + 1 - 1) + 5 = -(x + 1)^2 + 6$$

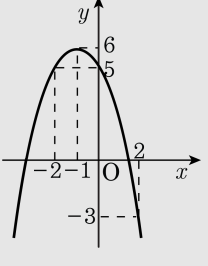
점 $(-1, 6)$ 을 꼭지점으로 하고 위로 볼록한 포물선으로 다음 그림과 같다.

$$f(-2) = 5, f(2) = -3$$

따라서 최댓값은 $x = -1$ 일 때 $f(-1) = 6$ 이며

최솟값은 $x = 2$ 일 때 $f(2) = -3$ 이다.

$$\therefore M + m = 6 - 3 = 3$$



4. $z = 1 + i$ 일 때, $\frac{\bar{z}-1}{z} - \frac{z-1}{\bar{z}}$ 의 값을 구하면?

- ① $-i$ ② i ③ $-2i$ ④ $2i$ ⑤ $3i$

해설

$$\begin{aligned}\bar{z} &= 1 - i \\ \frac{\bar{z}-1}{z} - \frac{z-1}{\bar{z}} &= \frac{-i}{1+i} - \frac{i}{1-i} \\ &= -\frac{2i}{(1+i)(1-i)} \\ &= -i\end{aligned}$$

5. $\sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(3-x)^2} = x+3$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다. 이 두 실근을 α, β 라 할 때, $3\alpha\beta$ 의 값은?

① 3

② 5

③ 7

④ 9

⑤ 11

해설

$$(\text{준식}) = |x-1| + |3-x| = x+3$$

$$\text{i) } x < 1$$

$$-x+1+3-x = x+3, 3x=1$$

$$\therefore x = \frac{1}{3}$$

$$\text{ii) } 1 \leq x < 3$$

$$x-1+3-x = x+3,$$

$$x = -1 (\text{해가 아니다})$$

$$\text{iii) } x \geq 3$$

$$x-1-3+x = x+3, x=7$$

$$\text{두 근이 } \frac{1}{3}, 7$$

$$\therefore 3\alpha\beta = 7$$

6. 이차방정식 $x^2 + 2|x| - 8 = 0$ 의 해는 ?

① $-2, 4$

② $-2, 2$

③ $-4, 4$

④ $-4, 2$

⑤ $-4, -2, 2, 4$

해설

$x^2 + 2|x| - 8 = 0$ 에서

i) $x > 0$ 일 때,

$x^2 + 2x - 8 = 0, (x + 4)(x - 2) = 0$

$\therefore x = -4$ 또는 $x = 2$

그런데 $x > 0$ 이므로 $x = 2$

ii) $x < 0$ 일 때,

$x^2 + 2x - 8 = 0, (x - 4)(x + 2) = 0$

$\therefore x = 4$ 또는 $x = -2$

그런데 $x < 0$ 이므로 $x = -2$

i), ii)에서 구하는 해는 $-2, 2$

7. 이차방정식 $x^2 - ax + 12 = 0$ 의 두 근이 3, b 일 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 28

해설

$x = 3$ 이 $x^2 - ax + 12 = 0$ 의 근이므로

$$9 - 3a + 12 = 0 \quad \therefore a = 7$$

이 때 $x^2 - 7x + 12 = 0$ 에서 $(x - 3)(x - 4) = 0$

그러므로 $x = 3$ 또는 $x = 4$

$$\therefore b = 4 \quad \therefore ab = 28$$

8. x 에 관한 이차방정식 $x^2 - 2(k-a)x + k^2 + a^2 - b + 1 = 0$ 이 k 의 값에 관계없이 중근을 갖도록 a, b 의 값을 정하면?

- ① $a = 0, b = 1$ ② $a = 0, b = -1$ ③ $a = -1, b = 0$
④ $a = -1, b = 1$ ⑤ $a = -1, b = 2$

해설

$$\frac{D}{4} = (k-a)^2 - (k^2 + a^2 - b + 1) = 0 \text{에서}$$

$$k^2 - 2ak + a^2 - k^2 - a^2 + b - 1 = 0$$

$$\therefore -2ak + b - 1 = 0$$

이것이 k 값에 관계없이 항상 성립하기 위해서는

$$-2a = 0, b - 1 = 0$$

$$\therefore a = 0, b = 1$$

9. 이차방정식 $x^2 + ax + (a - 4) = 0$ 의 근의 차가 최소가 되는 실수 a 의 값을 구하면?

① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

해설

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= -a, \quad \alpha\beta = a - 4 \\ \therefore (\alpha - \beta)^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= (-a)^2 - 4(a - 4) \\ &= a^2 - 4a + 16 = (a - 2)^2 + 12 \\ \therefore \text{두 근의 차는 } a = 2 \text{일 때 최소}\end{aligned}$$

해설

$$\begin{aligned}|\alpha - \beta| &= \frac{\sqrt{D}}{|a|} \text{이므로} \\ |\alpha - \beta| &= \sqrt{a^2 - 4(a - 4)} = \sqrt{(a - 2)^2 + 12} \\ \therefore a = 2 \text{일 때, 두 근의 차가 최소}\end{aligned}$$

10. 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근의 합이 2, 곱이 3일 때, 이차방정식 $f(2x+1) = 0$ 의 두 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f(x) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면

$f(\alpha) = 0, f(\beta) = 0$ 이고 조건에서

$\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = 3$

$f(2x+1) = 0$ 에서

$2x+1 = \alpha$ 또는 $2x+1 = \beta$

$\therefore x = \frac{\alpha-1}{2}$ 또는 $x = \frac{\beta-1}{2}$

따라서 $f(2x+1) = 0$ 의 근은 $\frac{\alpha-1}{2}, \frac{\beta-1}{2}$

이때 두 근의 합 $\frac{\alpha-1}{2} + \frac{\beta-1}{2}$

$= \frac{\alpha+\beta-2}{2} = \frac{2-2}{2} = 0$

11. 종섭이와 성제가 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 을 각각 풀었다. 종섭이는 x 의 계수를 잘못 봐서 $3 - 2i$, $3 + 2i$ 라는 근을 구했고, 성제는 상수항을 잘못 봐서 $2 - i$, $2 + i$ 라는 근을 구했을 때, $\left| \frac{bc}{a^2} \right|$ 의 값은?

▶ 답 :

▷ 정답 : 52

해설

종섭이는 x 의 계수를 잘못 보았으므로 상수항은 참이다.

두 근의 곱 $= \frac{c}{a} = (3 - 2i)(3 + 2i) = 9 + 4 = 13$

성제는 상수항을 잘못 보았으므로 x 의 계수는 참이다.

두 근의 합 $= -\frac{b}{a} = 2 - i + 2 + i = 4$

$\therefore \left| \frac{bc}{a^2} \right| = \left| \frac{b}{a} \times \frac{c}{a} \right| = |-4 \times 13| = |-52| = 52$

12. 두 함수 $y = x^2 - 2kx + 4k$, $y = 2kx - 3$ 의 그래프에 대하여 이차함수의 그래프가 직선보다 항상 위쪽에 있도록 k 의 값의 범위를 정하면?

- ① $-\frac{7}{9} < k < -\frac{11}{6}$ ② $-\frac{1}{4} < k < -\frac{6}{5}$ ③ $-\frac{1}{3} < k < 0$
 ④ $-\frac{1}{2} < k < \frac{3}{2}$ ⑤ $-\frac{1}{2} < k < \frac{7}{5}$

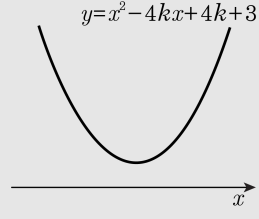
해설

함수 $y = x^2 - 2kx + 4k$ 의 그래프가 직선 $y = 2kx - 3$ 보다 항상 위쪽에 있으려면

$$y = x^2 - 2kx + 4k > 2kx - 3,$$

즉 $x^2 - 4kx + 4k + 3 > 0$ 이 항상 성립해야 한다.

이 때, 이 부등식이 항상 성립하려면 그림과 같이 $y = x^2 - 4kx + 4k + 3$ 의 그래프가 x 축보다 위쪽에 있어야 하므로



$$\frac{D}{4} = 4k^2 - 4k - 3 < 0, \quad (2k + 1)(2k - 3) < 0$$

$$\therefore -\frac{1}{2} < k < \frac{3}{2}$$

13. 둘레의 길이가 20 cm 인 철사를 구부려서 부채꼴 모양을 만들려고 한다. 부채꼴의 넓이가 최대가 되도록 하는 부채꼴의 반지름을 a , 이때 부채꼴의 넓이를 b 라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

부채꼴의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}a(20 - 2a) = a(10 - a) = -a^2 + 10a \\ &= -(a^2 - 10a + 25) + 25 \\ &= -(a - 5)^2 + 25 \end{aligned}$$

$$a = 5, b = 25$$

따라서 $a + b = 30$ 이다.

14. $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 1$

▷ 정답 : $x = -2$

▷ 정답 : $x = 3$

해설

$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ 으로 놓으면
 $f(1) = 1 - 2 - 5 + 6 = 0$ 이므로, 조립제법에 의하면

1		1	-2	-5	6
			1	-1	-6
		1	-1	-6	0

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(x^2 - x - 6)$$
$$= (x - 1)(x + 2)(x - 3)$$
$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = -2 \text{ 또는 } x = 3$$

15. 방정식 $(x^2 + x + 2)^2 = x^2 + x + 4$ 의 두 허근을 α, β 라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값은?

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

$(x^2 + x + 2)^2 = x^2 + x + 4$ 에서

$x^2 + x + 2 = A$ 라 하면

$A^2 = A + 2,$

$A^2 - A - 2 = 0, (A + 1)(A - 2) = 0$

$\therefore A = -1$ 또는 $A = 2$

(i) $x^2 + x + 2 = -1$ 일 때, $x^2 + x + 3 = 0$

(ii) $x^2 + x + 2 = 2$ 일 때, $x^2 + x = 0$

(i), (ii)에서 α, β 는 허근이므로 $x^2 + x + 3 = 0$ 의 근이 된다.

따라서, $\alpha + \beta = -1, \alpha\beta = 3$ 이므로

$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (-1)^2 - 2 \times 3 = -5$

16. 삼차방정식 $x^3 - ax - b = 0$ 의 한 근이 $1 - \sqrt{2}$ 일 때, 유리수 a, b 에 대하여 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

방정식 $x^3 - ax - b = 0$ 의 계수가 유리수이므로

세 근을 $1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}, \alpha$ 라고 하면

$$(1 - \sqrt{2}) + (1 + \sqrt{2}) + \alpha = 0 \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

$$(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) + (1 + \sqrt{2})\alpha + (1 - \sqrt{2})\alpha = -a \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

$$(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})\alpha = b \quad \cdots \textcircled{㉢}$$

㉠에서 $\alpha = -2$ 를 ㉡에 대입하면

$$-a = 1 - 2 - 2 - 2\sqrt{2} - 2 + 2\sqrt{2} = -5 \quad \therefore a = 5$$

$$\alpha = -2 \text{를 } \textcircled{㉢} \text{에 대입하면 } b = -2(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) = 2$$

$$\therefore a + b = 5 + 2 = 7$$

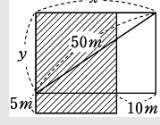
17. 대각선의 길이가 50m 인 직사각형 모양의 땅이 있다. 이 땅의 세로를 5m 늘리고, 가로를 10m 줄이면 넓이가 50m^2 만큼 늘어난다. 처음 직사각형의 가로의 길이를 구하여라. (단위는 생략할 것)

▶ 답: m

▶ 정답 : 48m

해설

처음 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 x m, y m 라 하면



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 50^2 \cdots \textcircled{7} \\ (x-10)(y+5) = xy + 50 \cdots \textcircled{8} \end{cases}$$

㉔을 정리하면 $5x - 10y = 100$

$\therefore x = 2y + 20 \dots \textcircled{㉔}$
 $\textcircled{㉔}$ 을 $\textcircled{㉓}$ 에 대입하면

$$(200 + 20)^2 + \dots^2 = 5$$

$$(2y + 20)^2 + y^2 = 50^2$$

$$y^2 + 16y - 420 = 0$$

$$(y - 14)(y + 30) = 0$$

$$\therefore y = 14, -30$$

그런데 $0 < y < 50$ 이므로 $y = 14$

이것을 ㉔에 대입하면 $x = 48$

18. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=2a \\ xy=a \end{cases}$ 를 만족하는 순서쌍 (x,y) 가 한 개 뿐일 때, 양의 실수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\begin{cases} x+y=2a \cdots ① \\ xy=a \cdots ② \end{cases}$$

①에서 $y = -x + 2a$ 를 ②에 대입하면

$$x(-x + 2a) = a$$

$\therefore -x^2 + 2ax = a$ 즉 $x^2 - 2ax + a = 0$ 이 한 개의

실근을 가져야 하므로 $D/4 = a^2 - a = 0$

$\therefore a = 0$ 또는 1 그런데

a 는 양의실수 이므로

$$a = 1$$

19. 정수 n 에 대해 $z = i^n + i^{-n}, i = \sqrt{-1}$ 을 만족하는 z 의 개수는?

① 1개

② 2개

③ 3개

④ 4개

⑤ 4개보다 많다.

해설

정수 n 에 대하여 $i^n = i$ 또는 -1 또는 $-i$ 또는 1 ,

$i^n = i$ 이면 $i^{-n} = -i, i^n = -1$ 이면

$i^{-n} = -1, i^n = -i$ 이면

$i^{-n} = i, i^n = 1$ 이면

$i^{-n} = 1$

$\therefore i^n + i^{-n} = 0, -2, 0, 2$

$\therefore z$ 는 3개다.

20. 방정식 $x^2+3x+1=0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $(\alpha^2+5\alpha+1)(\beta^2-4\beta+1)$ 의 값은?

- ① -2 ② -4 ③ -8 ④ -14 ⑤ -17

해설

방정식 $x^2+3x+1=0$ 의 근이 α, β 이므로

$$\alpha^2+3\alpha+1=0, \beta^2+3\beta+1=0$$

$$\alpha^2+1=-3\alpha, \beta^2+1=-3\beta$$

$$\therefore (\alpha^2+5\alpha+1)(\beta^2-4\beta+1)$$

$$=(-3\alpha+5\alpha)(-3\beta-4\beta)$$

$$=-14\alpha\beta$$

근과 계수와의 관계에서 $\alpha\beta=1$ 이므로

$$(\text{주어진 식})=-14$$

21. 이차함수 $y = x^2 + kx + k$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, m 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$y = x^2 + kx + k = \left(x + \frac{k}{2}\right)^2 - \frac{k^2}{4} + k$$

$$\text{최솟값 } m = -\frac{k^2}{4} + k$$

$$m = -\frac{k^2}{4} + k = -\frac{1}{4}(k-2)^2 + 1$$

$k = 2$ 일 때, m 은 최댓값 1 을 갖는다.

22. α, β, γ 가 삼차방정식 $x^3 - ax - 3 = 0$ 의 세 근일 때, $\frac{\alpha + \beta}{\gamma^2}, \frac{\beta + \gamma}{\alpha^2}, \frac{\alpha + \gamma}{\beta^2}$

를 세 근으로 하는 삼차 방정식을 구하면?

- ① $3x^3 - ax^2 + 1 = 0$
- ② $x^3 - ax - 3 = 0$
- ③ $3x^3 + ax^2 + 1 = 0$
- ④ $x^3 + ax + 3 = 0$
- ⑤ $3x^3 - ax^2 - 1 = 0$

해설

$$\begin{aligned} &x^3 - ax - 3 \\ &= (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \\ &= 0 \text{에서} \\ &\alpha + \beta + \gamma = 0, \\ &\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -a, \alpha\beta\gamma = 3 \\ &\therefore \frac{\alpha + \beta}{\gamma^2} = -\frac{\gamma}{\gamma^2} = -\frac{1}{\gamma}, \\ &\frac{\beta + \gamma}{\alpha^2} = -\frac{\alpha}{\alpha^2} = -\frac{1}{\alpha}, \\ &\frac{\alpha + \gamma}{\beta^2} = -\frac{\beta}{\beta^2} = -\frac{1}{\beta} \end{aligned}$$

따라서, $\frac{\alpha + \beta}{\gamma^2}, \frac{\beta + \gamma}{\alpha^2}, \frac{\alpha + \gamma}{\beta^2}$ 를

세 근으로 하는 방정식은

$$\begin{aligned} &\left(x + \frac{1}{\alpha}\right)\left(x + \frac{1}{\beta}\right)\left(x + \frac{1}{\gamma}\right) \\ &= x^3 + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right)x^2 \\ &\quad + \left(\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\alpha\gamma}\right)x + \frac{1}{\alpha\beta\gamma} \\ &= x^3 + \left(-\frac{a}{3}\right)x^2 + \frac{1}{3} = 0 \\ &\therefore 3x^3 - ax^2 + 1 = 0 \end{aligned}$$

23. $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \beta = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $(\alpha + 1)^{10} + (\beta + 1)^{10}$ 의 값은?

- ① -3 ② -1 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \beta = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ 에서 양변에 2를 곱하고 -1을
이항한 후 양변을 제곱해서 정리하면
 $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0, \beta^2 + \beta + 1 = 0 \cdots \textcircled{1}$
 $\therefore \alpha + 1 = -\alpha^2, \beta + 1 = -\beta^2$
①의 양변에 각각 $\alpha - 1, \beta - 1$ 을 곱하면
 $(\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1) = 0, (\beta - 1)(\beta^2 + \beta + 1) = 0$
 $\therefore \alpha^3 = 1, \beta^3 = 1$
 $(\alpha + 1)^{10} + (\beta + 1)^{10}$
 $= (-\alpha^2)^{10} + (-\beta^2)^{10}$
 $= (\alpha^3)^6 \cdot \alpha^2 + (\beta^3)^6 \cdot \beta^2$
 $= \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$
 $= -1 \quad (\because \alpha + \beta = -1, \alpha\beta = 1)$

해설

$\alpha + 1 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}, \beta + 1 = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$

 $\alpha + 1 = A, \beta + 1 = B$ 라 하면
 $A + B = 1, AB = 1$ 이므로 A, B 는
이차방정식 $x^2 - x + 1 = 0$ 의 두 근 이다.
 $(x + 1)(x^2 - x + 1) = x^3 + 1 = 0$
 $\therefore x^3 = -1, A^3 = B^3 = -1$
(준식) $= A^{10} + B^{10} = (A^3)^3 \cdot A + (B^3)^3 \cdot B$
 $= -(A + B)$
 $= -1$

24. x 가 실수일 때, $f(x) = (x^2 + 4x + 6)(x^2 + 4x + 2) + 2x^2 + 8x + 10$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$$t = x^2 + 4x + 2 = (x + 2)^2 - 2 \geq -2$$

$$\begin{aligned}\therefore f(x) &= g(t) = (t + 4)t + 2t + 6 \\ &= t^2 + 6t + 6 = (t + 3)^2 - 3\end{aligned}$$

$$\therefore g(t) \text{ 는 } t = -2 \text{ 일 때, 최솟값 } -2 \text{ } (\because t \geq -2)$$

25. x 에 관한 두 개의 이차방정식 $x^2 + m^2x + n^2 - 2m = 0$, $x^2 - 2mx + n^2 + m^2 = 0$ 이 오직 하나의 공통근을 가지고, m, n 이 실수일 때, $m + n$ 의 값은? (단, 중근인 경우에는 두 개의 실근으로 본다.)

- ① 0
- ② 1
- ③ 2
- ④ 3
- ⑤ 4

해설

두 방정식의 공통근을 α 라 하면
 $\alpha^2 + m^2\alpha + n^2 - 2m = 0 \cdots ①$
 $\alpha^2 - 2m\alpha + m^2 + n^2 = 0 \cdots ②$
① - ②하면
 $(m^2 + 2m)\alpha - (m^2 + 2m) = 0$
 $\therefore (m^2 + 2m)(\alpha - 1) = 0$
 $\therefore m^2 + 2m = 0$ 또는 $\alpha - 1 = 0$
그런데 $m^2 + 2m = 0$ 일 때,
곧, $m^2 = -2m$ 일 때에는 두 방정식이 일치하게 되므로 오직 하나의 공통근을 가진다는 문제의 뜻에 어긋난다.
 $\therefore \alpha = 1$
이것을 ①에 대입하면
 $1 + m^2 + n^2 - 2m = 0 \quad \therefore (m - 1)^2 + n^2 = 0$
문제의 조건으로부터 m, n 은 실수이므로
 $m - 1 = 0, n = 0$
 $\therefore m = 1, n = 0 \quad \therefore m + n = 1$