1. 다음 중 명제가 아닌 것은?

① $2(x-3)=-x+5+3x$

② $x>-1$이면 $x>0$이다.

③ x가 실수이면 $x^2 \geq 0$이다.

④ $x^2+4x-5=0$

⑤ $x=2$이면 $x^3=8$이다.

해설

참인 명제 : ③, ⑤

거짓인 명제 : ①, ②

④의 경우 $x=-5$ 또는 $x=1$일 때는 참이고, 그 외의 경우는 거짓이므로 명제가 아니다.

2. 다음 중 참인 명제는? (단, 문자는 모두 실수이다.)

① $a < b$이면 $a + c > b + c$

② $a < b$이면 $a - c > b - c$

③ $a < b$이고 $c > 0$이면 $ac > bc$

④ $a < b$이고 $c > 0$이면 $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

⑤ $ac < bc$이면 $a > b$

해설

실수의 대소 관계에는 다음과 같은 성질이 있다.

i) 임의의 두 실수 a, b 에 대하여 $a > b$, $a = b$, $a < b$ 중에서 어느 하나만이 성립한다.

ii) $a > b$, $b > c$ 이면 $a > c$

iii) $a > b$ 이면 $a \pm c > b \pm c$

iv) $a > b$, $c > 0$ 이면 $ac > bc$

v) $a > b$, $c < 0$ 이면 $ac < bc$

따라서 참인 것은 ④이다.

3. 명제 'x 가 4의 배수이면 x 는 2의 배수이다' 의 대우는?

① x 가 2의 배수이면 x 는 4의 배수이다.

② x 가 2의 배수이면 x 는 4의 배수가 아니다.

③ x 가 4의 배수이면 x 는 2의 배수가 아니다.

④ x 가 4의 배수가 아니면 x 는 2의 배수가 아니다.

⑤ x 가 2의 배수가 아니면 x 는 4의 배수가 아니다.

해설

$p \to q$ 의 대우는 $\sim q \to \sim p$

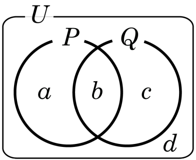
4. 다음 중 $x > 7$ 의 필요조건이고, 충분조건은 되지 않는 것은?

① $x > 7$ ② $x < 7$ ③ $x \geq 7$ ④ $x \leq 7$ ⑤ $x = 7$

해설

$x > 7$ 범위를 포함하는 것을 고르면 $x \geq 7$

5. 전체집합 U 에서 두 조건 p, q 를 만족하는 집합 P, Q 에 대하여 두 집합 P, Q 사이의 포함 관계가 다음과 같을 때, 명제 $p \to q$ 가 거짓임을 보여주는 원소는 무엇인가?



① a ② b ③ c ④ d ⑤ a와 c

해설

명제 $p \to q$ 가 참이 되려면 두 조건 p, q 를 만족하는 집합 P, Q 에 대하여 $P \subset Q$ 가 성립해야 한다. $P \subset Q \leftrightarrow x \in P$이면 $x \in Q$

P 의 원소 a 에 대하여 $a \in P$ 이나 $a \notin Q$ 이므로 $p \to q$ 는 거짓이다.

6. 다음 (가), (나)에 들어갈 말을 알맞게 나열한 것은?

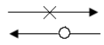
• $\lvert a \rvert = \lvert b \rvert$ 는 $a = b$ 이기 위한 (가) 조건이다. • 3의 배수는 6의 배수이기 위한 (나) 조건이다.

① 필요, 필요 ② 필요, 충분

③ 충분, 충분 ④ 충분, 필요

⑤ 충분, 필요충분

해설

$\lvert a \rvert = \lvert b \rvert$  $a = b$ $\therefore$ 필요

$\{x \mid x$는 3의 배수$\} \supset \{x \mid x$는 6의 배수$\}$ $\therefore$ 필요

7. 다음 (가), (나)에 들어갈 말을 알맞게 나열한 것은?

> • $1 < x \leq 3$ 은 $x > -2$ 이기 위한 (가) 조건이다.
> • $2x = 4$ 는 $x^2 - 4x + 4 = 0$ 이기 위한 (나) 조건이다.

① 필요, 필요

② 필요, 충분

③ 충분, 충분

④ 충분, 필요

⑤ 충분, 필요충분

해설

$P = \{x \mid 1 < x \leq 3\}$,

$Q = \{x \mid x > -2\}$ 라고 하면

$P \subset Q$, $\therefore$ 충분조건

$R = \{x \mid 2x = 4\} = \{2\}$,

$S = \left\{x \mid x^2 - 4x + 4 = 0\right\} = \{2\}$ 라고 하면

$R = S$, $\therefore$ 필요충분조건

8. n이 자연수 일 때, $2^{10n}, 1000^n$ 의 대소를 비교하면?

① $2^{10n} < 1000^n$ ② $2^{10n} \leq 1000^n$ ③ $2^{10n} > 1000^n$

④ $2^{10n} \geq 1000^n$ ⑤ $2^{10n} = 1000^n$

해설

$2^{10n} > 0,\ 1000^n > 0$ 이고, n이 자연수이므로

$$\frac{2^{10n}}{1000^n} = \frac{(2^{10})^n}{1000^n} = \left(\frac{2^{10}}{1000}\right)^n = \left(\frac{1024}{1000}\right)^n > 1$$

$\therefore 2^{10n} > 1000^n$

9. $x > 2$일 때 $4x + \dfrac{1}{x-2}$의 최솟값은?

① 6　　② 8　　③ 10　　④ 12　　⑤ 14

해설

$x-2=t$ 로 놓으면 $t>0$이고 $x=t+2$

따라서 주어진 식을 t로 나타낸 다음 산술평균과 기하평가의 관계를 이용하면

$$\begin{aligned} 4x+\frac{1}{x-2} &= 4(t+2)+\frac{1}{t} \\ &= 4t+\frac{1}{t}+8 \\ &\geq 2\sqrt{4t+\frac{1}{t}}+8 \\ &= 12 \end{aligned}$$

(단, 등호는 $4t=\dfrac{1}{t}$ 일 때 성립)

10. 양수 a, b에 대하여 $a^2+b^2=1$을 만족할 때, $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}$의 최솟값은?

① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

해설

$a^2>$, $b^2>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a^2+b^2 \ge 2\sqrt{a^2b^2}=2ab$

(단, 등호는 $a^2=b^2$ 일 때 성립)

그런데 $a^2+b^2=1$ 이므로 $1 \ge 2ab$

$\therefore ab \le \dfrac{1}{2}$

$\dfrac{1}{a^2}>0$, $\dfrac{1}{b^2}>0$이므로 산술평균 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2} \ge 2\sqrt{\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{b^2}}$$

$$\frac{2}{ab} \ge \frac{2}{\frac{1}{2}}=4$$

(단, 등호는 $a^2=b^2$ 일 때 성립)

따라서 $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}$ 의 최솟값은 4이다.

11. $x > 3$일 때 $\dfrac{3}{x-3}+2+3x$의 최솟값은?

① 3　　② 5　　③ 12　　④ 15　　⑤ 17

해설

$$\frac{3}{x-3}+2+3x=3(x-3)+\frac{3}{x-3}+11$$

이 때, $x>3$이므로 $3(x-3)>0$, $\dfrac{3}{x-3}>0$

산술평균과 기하평균에 의해

$$3(x-3)+\frac{3}{x-3}+11$$
$$\geq 2\sqrt{3(x-3)\cdot\frac{3}{x-3}}+11$$
$$=2\cdot 3+11=17$$

(단, 등호는 $3(x-3)=\dfrac{3}{x-3}$, 즉 $x=4$일 때 성립)

따라서 최솟값은 17

12. $a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0$이고, $a+b+c=14$일 때, $\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c}$의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(1^2+2^2+3^2)\left\{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2+(\sqrt{c})^2\right\}$

$\geq (\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c})^2$

$(\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c})^2 \leq 14(a+b+c)=14^2$

이 때 $a \geq 0,\ b \geq 0, c \geq 0$이므로

$0 \leq \sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c} \leq 14$

따라서 최댓값은 14이다.

13. 「모든 중학생은 고등학교에 진학한다」의 부정인 명제는?

① 고등학교에 진학하는 중학생은 없다.

② 어떤 중학생은 고등학교에 진학한다.

③ 중학생이 아니면 고등학교에 진학하지 않는다.

④ 모든 중학생은 고등학교에 진학하지 않는다.

⑤ 어떤 중학생은 고등학교에 진학하지 않는다.

해설

부정이란 'p 이면 q 이다'가 'p 이면 q 가 아니다'이고, '모든'의 부정은 '어떤'이므로 '모든 중학생은(p) 고등학교에 진학한다(q)'의 부정은 '어떤 중학생은 고등학교에 진학하지 않는다'이다.

14. 실수 x에 대한 두 조건

p : $\lvert x-2\rvert < a$ (단, $a>0$) q : $x < -3$ 또는 $x > 1$

에 대하여 명제 $p \rightarrow q$가 참이 되기 위한 a의 값의 범위를 $\alpha < a \le \beta$라 할 때, $\alpha+\beta$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

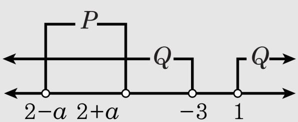
해설

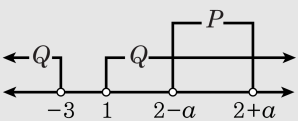
$\lvert x-2\rvert < a$ 에서 $-a < x-2 < a$ $\therefore$ $2-a < x < 2+a$ $\therefore$ $P=\{x \mid 2-a < x < 2+a\}$, $Q=\{x \mid x < -3$ 또는 $x > 1\}$

따라서 $P \subset Q$가 되려면 $2+a \le -3$ $\cdots$ ㉠ 또는 $2-a \ge 1$ $\cdots$ ㉡,

즉, $a \le -5$ 또는 $a \le 1$

그런데 $a>0$이므로 구하는 a의 범위는 $0 < a \le 1$

㉠ : 

㉡ : 

$\therefore$ $\alpha=0,\ \beta=1$

$\therefore$ $\alpha+\beta=1$

15. $1 < x < 3$ 을 만족하는 모든 실수 x 에 대하여 $a-1 < x < a+2$ 가 성립할 때, 상수 a 의 값의 범위는?

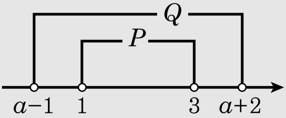
① $1 \le a \le 2$　② $1 \le a \le 3$　③ $1 < a < 3$

④ $-1 < a < 5$　⑤ $-1 \le a \le 5$

해설

집합 $P = \{x \mid 1 < x < 3\}$,

$Q = \{x \mid a-1 < x < a+2\}$ 로 놓으면 모든 $x \in P$ 에 대하여 $x \in Q$ 이므로 $P \subset Q$ 이다. 이를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$a-1 \le 1$, $a+2 \ge 3$

$\therefore\ 1 \le a \le 2$

16. 실수 x에 대하여 다음 명제가 참일 때, a의 최솟값을 구하여라.

$x > a$이면 $\lvert x-2 \rvert > 4$

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

주어진 명제가 참이므로

대우 '$\lvert x-2 \rvert \le 4$ 이면 $x \le a$ 이다.' 가 참이다.

$\lvert x-2 \rvert \le 4$ 에서

$-4 \le x-2 \le 4,\ \ -2 \le x \le 6$이므로

$\therefore\ a \ge 6$

따라서 a 의 최솟값은 6이다.

17. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라고 하자. 이때, 다음 식을 만족시키는 조건 p 는 q 이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

$$\{(P \cap Q) \cup (P \cap Q^c)\} \cap Q = P$$

▶ 답 : 조건

▷ 정답 : 충분조건

해설

$\{(P \cap Q) \cup (P \cap Q^c)\} \cap Q = P$

$\{P \cap (Q \cup Q^c)\} \cap Q = P$

$(P \cap U) \cap Q = P$

$P \cap Q = P$

$P \subset Q$

$\therefore \; p \Rightarrow q$

따라서, p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

18. $\{(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A} - \mathrm{B})\} \cap B = A$ 가 성립하기 위한 필요충분조건으로 알맞은 것은?

① $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}^c = \varnothing$　② $\mathrm{B} \cap \mathrm{A}^c = \varnothing$　③ $\mathrm{A} = \mathrm{B}$

④ $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$　⑤ $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{A}$

해설

$\{(A \cap B) \cup (A - B)\} \cap B$

$= \{(A \cap B) \cup (A \cap B^c)\} \cap B$

$= \{A \cap (B \cup B^c)\} \cap B$

$= A \cap B = A$

$\therefore A \subset B$이므로 $A \cap B^c = \varnothing$이면 $A \subset B$이므로 필요충분조건은 ①이다.

19. 세 조건 p, q, r 를 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 라 하자. p 는 q 이기 위한 충분조건이고 $\sim r$ 는 q 이기 위한 필요충분조건일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $R \cap Q = R$　　② $R \cup Q = R$　　③ $P \cap Q = \varnothing$

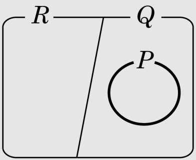
④ $P \cup R = R$　　⑤ $P \cap R = \varnothing$

해설

p 는 q 이기 위한 충분조건이므로 $P \subset Q$

$\sim r$ 는 q 이기 위한 필요충분조건이므로 $R^c = Q$

따라서, 세 집합의 포함 관계를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같으므로



$\therefore$ $P \cap R = \varnothing$

20. 다음 [보기] 중 절대부등식인 것을 모두 고르면?(단, x, y 는 실수)

보기

㉠ $x^2 \geq 0$

㉡ $x^3 \geq 0$

㉢ $|x| + |y| > 0$

① ㉠
② ㉡
③ ㉢
④ ㉠, ㉡
⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ 항상 성립한다. $\therefore$ 참

㉡ [반례] $x = -1$ 일 때, $x^3 < 0$ $\therefore$ 거짓

㉢ [반례] $x = 0$, $y = 0$ 일 때, $|x| + |y| = 0$ $\therefore$ 거짓

21. 어떤 사건을 조사하는 과정에서 네 사람 A, B, C, D 중에서 한 명이 범인이라는 사실을 알았다. 용의자 네 명의 진술 중 옳은 것은 하나뿐일 때, 그 진술을 한 사람과 범인을 차례로 쓴 것은?

A : 범인은 B이다. B : 범인은 D이다. C : 나는 범인이 아니다. D : B 는 거짓말을 하고 있다.

① A, D ② B, C ③ C, B ④ D, C ⑤ B, A

해설

B가 옳은 진술이라면 범인은 D가 되고 C도 옳은 진술이 된다. 그러나 진실을 말한 사람은 한 명뿐이기 때문에 B는 거짓이 되고, D가 옳은 진술이 된다. D를 제외한 나머지 모두 거짓말이 되기 때문에 범인은 C다.

22. 다음은 명제 'xy 가 3 의 배수이면 x, y 중 적어도 하나는 3 의 배수이다.(단, x, y 는 정수이다.)' 가 참임을 대우를 이용하여 증명한 것이다. (가)~(마) 에 들어갈 말로 <u>틀린</u> 것은?

주어진 명제의 대우는 'x, y 가 모두 (가) 가 아니면 xy 는 (가) 가 아니다.' 이다. 이것이 참임을 보이자.
x, y 가 모두 (나) 가 아니면 x, y 를 각각 $x = 3m \pm 1$, $y = 3n \pm 1$ (단, m, n 은 정수) 로 나타낼 수 있다.
이때, (다) $= (3m \pm 1)(3n \pm 1)$
$= 9mn \pm 3m \pm 3n + 1$
$= 3(3mn \pm m \pm n) + 1$
또는 (다) $= (3m \pm 1)(3n \mp 1)$
$= 9mn \mp 3m \pm 3n - 1$
$= 3(3mn \mp m \pm n) - 1$
이다. 그리고 m, n 이 정수이므로
$3mn \pm m \pm n$, $3mn \mp m \pm n$ 도 정수이다.
따라서, (다) 는 3 의 배수가 아니다. 즉, 주어진 명제의 대우는 (라) 이다.
그러므로 주어진 명제는 (마) 이다.

① (가) 3 의 배수　② (나) 3 의 배수　③ (다) xy
④ (라) 참　⑤ (마) 거짓

해설

대우가 참이므로 명제 역시 참이다.

23. 다음 중 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $(A\cup B)\cap(A^c\cup B^c)=B\cap A^c$가 성립하기 위한 필요충분조건은? (단, A^c는 전체집합 U에 대한 A의 여집합)

① $A=B$ ② $B\subset A$ ③ $A\subset B$

④ $A\cap B=\varnothing$ ⑤ $A\cup B=\varnothing$

해설

$(A\cup B)\cap(A^c\cup B^c)=(A\cup B)\cap(A\cap B)^c=(A-B)\cup(B-A)$
따라서 $(A-B)\cup(B-A)=B\cap A^c$ 에서 $(A-B)\cup(B-A)=B-A$ 가 성립하려면 $(A-B)\subset(B-A)$ 이어야 하는데 $A-B$와 $B-A$는 서로소이므로 $A-B=\varnothing$ $\therefore A\subset B$

24. x, y 가 실수일 때, 다음 중 절대부등식이 아닌 것을 모두 고른 것은?

㉠ $x+1>0$	㉡ $x^2+xy+y^2 \geq 0$
㉢ $\lvert x\rvert+\lvert y\rvert \geq \lvert x-y\rvert$	㉣ $\lvert x+y\rvert \geq \lvert x-y\rvert$

① ㉠　② ㉠, ㉢　③ ㉠, ㉣
④ ㉡, ㉣　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $x>-1$ 일 때만 성립한다.

㉡ $x^2+xy+y^2=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2 \geq 0$

(단, 등호는 $x=y=0$ 일 때 성립)

㉢ $(\lvert x\rvert+\lvert y\rvert)^2-\lvert x-y\rvert^2$

$=\lvert x\rvert^2+2\lvert x\rvert\lvert y\rvert+\lvert y\rvert^2-(x-y)^2$

$=2(\lvert xy\rvert+xy) \geq 0$

$\therefore (\lvert x\rvert+\lvert y\rvert)^2 \geq \lvert x-y\rvert^2$

(단, 등호는 $xy \leq 0$ 일 때 성립)

㉣ (반례) $x=2, y=-3$ 일 때

$\lvert 2+(-3)\rvert=1, \lvert 2-(-3)\rvert=5$ 이므로

$\lvert x+y\rvert<\lvert x-y\rvert$

따라서 절대부등식이 아닌 것은 ㉠, ㉣ 이다.