

1. 두 점 A(1, 2), B(-2, 6) 사이의 거리는?

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \sqrt{\{1 - (-2)\}^2 + (2 - 6)^2} \\ &= \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} \\ &= 5\end{aligned}$$

2. $A(1, 2)$, $B(3, -2)$ 을 $3:2$ 로 외분하는 점 $C(a, b)$ 에 대하여 $a+b$ 의 값은?

① -3

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 3

해설

외분점 구하는 공식을 이용한다.

C의 좌표는

$$\left(\frac{3 \times 3 - 2 \times 1}{3 - 2}, \frac{3 \times (-2) - 2 \times 2}{3 - 2} \right) = (7, -10)$$

$$\therefore a + b = -3$$

3. 원 $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$ 의 반지름의 길이는?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4 = 2^2$$

4. 두 점 $A(-3, 2)$, $B(4, 5)$ 에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점 P 의 좌표는?

① $(-3, 0)$

② $(1, 0)$

③ $(2, 0)$

④ $(-1, 0)$

⑤ $(5, 0)$

해설

x 축 위의 점을 $P(x, 0)$ 라 하면

$\overline{PA} = \overline{PB}$ 에서 $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$ 이므로

$$(x + 3)^2 + (0 - 2)^2 = (x - 4)^2 + (0 - 5)^2$$

$$14x = 28$$

따라서 $x = 2$ 즉, $P(2, 0)$

5. 이차방정식 $x^2 - ay^2 - 4x + 2y + k = 0$ 이 원을 나타낼 때 두 괄호에 들어갈 알맞은 값의 합을 구하여라.

$$a = (\quad), k < (\quad)$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

원의 방정식이 되기 위해서는 x^2 의 계수와 y^2 의 계수가 같아야 하므로 $a = -1$

또한, 준식을 표준형으로 나타내면,

$$x^2 - 4x + y^2 + 2y + k = 0 \text{ 에서}$$

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5 - k$$

여기서, $5 - k > 0$ 이어야 하므로 $k < 5$

6. 다음 방정식으로 표시되는 그래프는 m 의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다.

그 점의 좌표가 (a, b) 일 때, $a + b$ 의 값은? (단, $a < 0, b < 0$)

$$(x^2 + y^2 + 2x + 3y - 1)m + (x^2 + y^2 + 2x + 2y - 3) = 0$$

① -1

② -2

③ -3

④ -4

⑤ -5

해설

m 의 값에 관계없이 다음 두 원의 교점을 지난다.

$$x^2 + y^2 + 2x + 3y - 1 = 0,$$

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y - 3 = 0$$

연립하여 풀면 $(x, y) = (-3, -2), (1, -2)$

그러므로 $(a, b) = (-3, -2)$

7. 다음은 원 $x^2 + y^2 = r^2$ 에 대하여 기울기가 m 인 접선의 방정식을 구하는 과정이다.

원 $x^2 + y^2 = r^2$ 에 접하고 기울기가 m 인

접선의 방정식을 $y = mx + k$ 라 하자.

직선 $y = mx + k$ 를 원의 방정식

$x^2 + y^2 = r^2$ 에 대입하여 정리하면,

$$(1 + m^2)x^2 + 2mkx + \boxed{\text{(가)}} = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 원과 직선이 접하므로

$D = 0$ 에서

$$k = \pm \boxed{\text{(나)}}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y = mx \pm \boxed{\text{(나)}}$$

(가), (나)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① $r^2 - k^2, r\sqrt{m^2 + 1}$

② $r^2 - k^2, r\sqrt{m^2 - 1}$

③ $k^2 - r^2, \sqrt{m^2 + 1}$

④ $k^2 - r^2, r\sqrt{m^2 + 1}$

⑤ $k^2 - r^2, r\sqrt{m^2 - 1}$

해설

직선 $y = mx + k$ 를 원의 방정식 $x^2 + y^2 = r^2$ 에

대입하면, $x^2 + (mx + k)^2 = r^2$

$$(1 + m^2)x^2 + 2mkx + k^2 - r^2 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면,

$$\frac{D}{4} = m^2k^2 - (1 + m^2)(k^2 - r^2) = m^2r^2 + r^2 - k^2$$

원과 직선이 접하므로 $D = 0$,

$$\text{즉 } r^2(m^2 + 1) = k^2, k = \pm r\sqrt{m^2 + 1}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y = mx \pm r\sqrt{m^2 + 1}$$

$$\therefore \text{(가)} : k^2 - r^2, \text{(나)} : r\sqrt{m^2 + 1}$$

8. 삼각형 ABC의 꼭짓점 A의 좌표가 (5, 4), 변 AB의 중점의 좌표가 (-1, 3), 무게중심의 좌표가 (1, 2)일 때, 변 BC의 중점의 좌표를 (a, b)라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① -3

② 0

③ 2

④ 5

⑤ 7

해설

점 B(X, Y)라 하면,

$$\overline{AB} \text{의 중점} : \left(\frac{X+5}{2}, \frac{Y+4}{2} \right) = (-1, 3)$$

$$\therefore X = -7, Y = 2$$

이제 점 C(x, y)라 하면,

$$\text{무게중심은} \left(\frac{5 + (-7) + x}{3}, \frac{4 + 2 + y}{3} \right) = (1, 2)$$

$$\therefore x = 5, y = 0$$

$\therefore$ 변 BC의 중점은

$$\left(\frac{-7 + 5}{2}, \frac{2 + 0}{2} \right) = (-1, 1)$$

9. 좌표평면 위에 점 $O(0, 0)$, $A(a, b)$, $B(2, -1)$ 이 있다. 이때,
 $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{(a-2)^2 + (b+1)^2}$ 의 최솟값을 구하면?

① 1

② 2

③ $\sqrt{5}$

④ 3

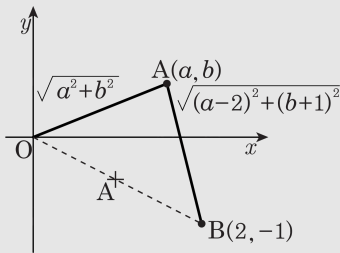
⑤ $\sqrt{10}$

해설

$\sqrt{a^2 + b^2}$ 은 $\overline{OA}$ 의 길이이고,
 $\sqrt{(a-2)^2 + (b+1)^2}$ 은 $\overline{AB}$
 의 길이이다.

따라서, 준 식은 O, A, B 가 일
 직선상에 있을 때
 최소가 된다. (그림 참조)

따라서, $\overline{OA} + \overline{AB}$ 의 최솟값은
 $\overline{OB} = \sqrt{5}$



10. 두 원 $x^2 + y^2 = 1$, $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 4$ 에 대하여 두 원이 외접할 때 $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

외접하기 위한 조건은 $\sqrt{a^2 + b^2} = 2 + 1$

$$\therefore a^2 + b^2 = 9$$

11. 원 $x^2 + y^2 + 2y = 0$ 과 직선 $y = mx - 3$ 이 만나지 않을 때, 상수 m 의 범위를 구하면?

① $-\sqrt{3} < m < \sqrt{3}$

② $-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$

③ $-1 < m < 1$

④ $-2 < m < 2$

⑤ $-3 < m < 3$

해설

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2y = 0 & \cdots \textcircled{㉠} \\ y = mx - 3 & \cdots \textcircled{㉡} \end{cases}$$

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$$(m^2 + 1)x^2 - 4mx + 3 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = (-2m)^2 - 3(m^2 + 1) = m^2 - 3$$

원과 직선이 만나지 않으려면 $\frac{D}{4} = m^2 - 3 < 0$

$$\therefore -\sqrt{3} < m < \sqrt{3}$$

해설

㉠, ㉡을 변형하면

$$\text{각각 } x^2 + (y + 1)^2 = 1, mx - y - 3 = 0$$

이 때, 원의 중심 $(0, -1)$ 에서

직선 $y = mx - 3$ 에 이르는 거리를 d 라고 하면

$$d = \frac{|1 - 3|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

원과 직선이 만나지 않으려면

$$\frac{2}{\sqrt{m^2 + 1}} > 1 \text{ 이어야 하므로}$$

$$\sqrt{m^2 + 1} < 2, m^2 < 3$$

$$\therefore -\sqrt{3} < m < \sqrt{3}$$

12. $x^2 + y^2 = 1$ 일 때, $2x + y$ 의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

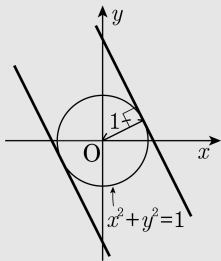
▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 최댓값 $\sqrt{5}$

▷ 정답 : 최솟값 $-\sqrt{5}$

해설



구하는 $2x + y = k$ 라 하면 $y = -2x + k$ 에서 k 는 기울기가 -2 인 직선의 y 절편이다.

주어진 조건을 만족할 때, 직선은 다음 그림과 같이 존재하므로

점과 직선사이의 거리에서 $\frac{|k|}{\sqrt{5}} \leq 1$

$\therefore -5 \leq k \leq \sqrt{5}$

13. 직선 $y = x + k$ 가 원 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 25$ 와 만나서 생기는 현의 길이가 8 일 때, 상수 k 의 값은?

① $2\sqrt{3}$

② $\pm 2\sqrt{3}$

③ $3\sqrt{2}$

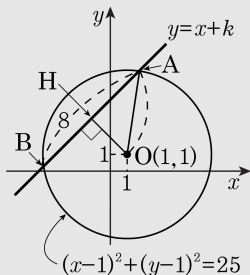
④ $-3\sqrt{2}$

⑤ $\pm 3\sqrt{2}$

해설

다음 그림과 같이 주어진 원과 직선의 교점을 A, B라 하고, 원의 중심 $O(1,1)$ 에서 직선 $x - y + k = 0$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{AH} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2} \times 8 = 4$$



직각삼각형 OHA에서

$$\overline{OH} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \dots \textcircled{㉠}$$

또 원의 중심 $O(1,1)$ 에서

직선 $x - y + k = 0$

사이의 거리가 $\overline{OH}$ 이므로

$$\overline{OH} = \frac{|1 - 1 + k|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{2}} \dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } \frac{|k|}{\sqrt{2}} = 3$$

$$\therefore k = \pm 3\sqrt{2}$$

14. 점 $(1, 3)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 접선을 그을 때 접선의 길이를 구하여라.

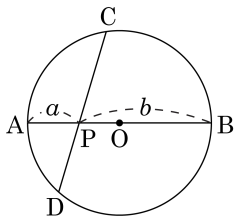
▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

원의 중심과 점 $(1, 3)$ 사이의 거리는 $\sqrt{10}$ 이므로
피타고라스의 정리에 의해 접선의 길이는 $\sqrt{10-1} = 3$

15. 다음 그림과 같이 원의 지름 AB 위의 임의의 한 점 P 를 지나 $\overline{PC}$ 의 길이가 원의 반지름의 길이와 같아지도록 현 CD 를 긋는다. $\overline{AP} = a$, $\overline{BP} = b$ 라 할 때, 선분 DP 의 길이를 a , b 를 써서 나타내면?



- ① $\frac{a+b}{2}$ ② $a+b$ ③ $\sqrt{ab}$
 ④ ab ⑤ $\frac{2ab}{a+b}$

해설

$$\overline{CP} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{a+b}{2} \text{ 이고}$$

$$\overline{AP} \cdot \overline{BP} = \overline{CP} \cdot \overline{DP} \text{ 이므로}$$

$$ab = \frac{a+b}{2} \cdot \overline{DP}$$

$$\therefore \overline{DP} = \frac{2ab}{a+b}$$