1. n 이 자연수이고 집합 A, B 가 $A = \{x \mid x = 2\times n\}$, $B = \{x \mid x = 2\times n+1\}$ 일 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $1 \notin B$ ② $4 \in A$ ③ $7 \notin A$ ④ $8 \notin A$ ⑤ $7 \in B$

해설

집합 A 의 원소는 $2,\ 4,\ 6,\ \cdots$ 이고 집합 B 의 원소는 $3,\ 5,\ 7, \cdots$ 이므로 $8 \in A$ 이다.

2. 집합 $A = \{1,\ 2,\ \{3,\ 4\},\ \varnothing\}$ 일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

㉠ $\{1\} \subset A$	㉡ $\{3,\ 4\} \not\subset A$
㉢ $\varnothing \subset A$	㉣ $\{\varnothing\} \not\subset A$
㉤ $\{1,\ 2,\ \{3,\ 4\},\ \varnothing\} \subset A$	

① ㉠　② ㉠,㉡　③ ㉠,㉢,㉤
④ ㉠,㉡,㉢,㉤　⑤ ㉠,㉡,㉢,㉣,㉤

해설

㉣ $\{\varnothing\} \subset A$

3. 집합 A 에 대하여 $x \in A$ 이면, $5 - x \in A$ 이다. 집합 A 의 원소가 모두 자연수일 때, 가능한 집합 A 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : _____ 개

▷ 정답 : 3 개

해설

집합 A 는 $(1,\ 4)$, $(2,\ 3)$ 의 순서쌍을 원소로 갖고 $\varnothing$ 은 갖지 않는 집합이므로

$2^2 - 1 = 3$ (개)

4. $\{x \mid x$는 6의 약수$\} \subset X \subset \{x \mid x$는 12의 약수$\}$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는?

① 2 개 ② 4 개 ③ 5 개 ④ 6 개 ⑤ 8 개

해설

$\{1,\ 2,\ 3,\ 6\} \subset X \subset \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$ 이므로
집합 X 는 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$ 의 부분집합 중
원소 1, 2, 3, 6 을 포함하는 집합이다.
$\therefore$ 집합 X 의 개수는 $2^2 = 4$ (개)

5. 집합 $A = \{a,\ b,\ c\}$ 의 부분집합 중 원소 a 또는 b 를 포함하는 부분집합의 개수는?

① 4　　② 5　　③ 6　　④ 7　　⑤ 8

해설

원소 a 를 포함하는 부분집합의 개수 :
$2^{3-1} = 4$ (개)
원소 b 를 포함하는 부분집합의 개수 :
$2^{3-1} = 4$ (개)
원소 a, b 를 포함하는 부분집합의 개수 :
$2^{3-2} = 2$ (개)
원소 a 또는 b 를 포함하는 부분집합의 개수 :
$4 + 4 - 2 = 6$ (개)

6. 집합 $A = \{1, 2, \cdots, n\}$ 에서 2 를 포함한 부분집합의 개수가 8 개라고 할 때, 자연수 n 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$2^{(2\text{를 제외한 원소의 개수})} = 2^{n-1} = 8 = 2^3 \quad \therefore n = 4$

7. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $A \cap B = B \cap A$

② $A \cap \varnothing = \varnothing$

③ $(A \cap B) \subset B$

④ $A \subset B$ 이면 $A \cup B = B$

⑤ $B \subset A$ 이면 $A \cap B = A$

해설

③ $(A \cap B) \subset A$,$(A \cap B) \subset B$
④ $A \subset B$ 이면 $A \cup B = B$
⑤ $B \subset A$ 이면 $A \cap B = B$

8. 3 학년 3 반 33 명의 학생 중에서 컴퓨터를 가지고 있는 학생이 25 명, 자신의 홈페이지를 가지고 있는 학생이 10 명, 컴퓨터와 홈페이지의 어느 것도 가지고 있지 않은 학생이 3 명이다. 컴퓨터와 홈페이지를 모두 가지고 있는 학생 수는?

① 3 명 ② 5 명 ③ 7 명 ④ 9 명 ⑤ 11 명

해설

컴퓨터를 가지고 있는 학생을 집합 A 라 하고, 자신의 홈페이지를 가지고 있는 학생을 집합 B 라 하자.
컴퓨터와 홈페이지의 어느 것도 가지고 있지 않은 학생이 3 명이므로 합집합의 원소의 개수는 $33 - 3 = 30$ 이다.
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
$30 = 25 + 10 - x$
$x = 5$

9. 35명의 학생들을 대상으로 수학과 과학의 선호도를 조사 하였더니, 수학과 과학을 모두 좋아하는 학생이 17명, 수학을 좋아하지 않는 학생이 12명이었다. 이 때, 수학만 좋아하는 학생은 몇 명인지 구하여라.

▶ 답 : _____ 명

▷ 정답 : 6 명

해설

수학을 좋아하는 학생의 집합을 A , 과학을 좋아하는 학생의 집합을 B 라 하면구하는 것은 $n(A-B)$

$n(U)=35,\ n(A\cap B)=17,\ n(A^c)=12$

$n(A)=n(U)-n(A^c)=35-12=23$

$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=23-17=6$

10. 다음 두 조건 p, q 에 대하여 '$\sim p$ 또는 q '의 부정은?

p : $-1 < x \le 3$, q : $0 < x \le 2$

① $-1 < x \le 0$ 또는 $2 < x \le 3$

② $-1 < x < 0$ 또는 $2 \le x \le 3$

③ $-1 < x \le 3$

④ $0 < x \le 2$

⑤ x 는 모든 실수

해설

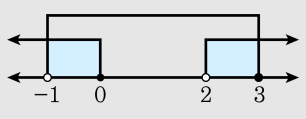
$\sim(\sim p$ 또는 $q) \leftrightarrow p$ 이고 $\sim q$ 그런데

$\sim q$: $x \le 0$ 또는 $x > 2$ 이므로 p 이고 $\sim q$

$\leftrightarrow$ $(-1 < x \le 3)$ 이고 $(x \le 0$ 또는 $x > 2)$

$\leftrightarrow$ $(-1 < x \le 3$ 이고 $x \le 0)$ 또는 $(-1 < x \le 3$ 이고 $x > 2)$

$\leftrightarrow -1 < x \le 0$ 또는 $2 < x \le 3$



11. 다음 중 두 조건 p, q에 대하여 p 가 q 이기 위한 필요조건만 되는 것은? (단, x, y는 실수, A, B는 집합이다.)

① $p : x^2 - 4x + 4 = 0$, $q : x^2 - 3x + 2 = 0$

② $p : x$는 8의 양의 약수, $q : x$는 6의 양의 약수

③ $p : |x| < 1$, $q : x^2 - 1 < 0$

④ $p : |x + y| = |x| + |y|$, $q : x = y$

⑤ $p : A - B = A$, $q : A \cap B = \phi$

해설

주어진 명제는 거짓이고 역은 참인 것을 고른다.
① 충분조건
② 아무런 조건 아님
③ 필요충분조건
⑤ 필요충분조건

12. x, y 가 실수일 때, 다음 중에서 조건 p가 조건 q 이기 위한 필요충분인 것은 ?

① $p : x+y \geq 2$, $q : x \geq 1$ 또는 $y \geq 1$

② $p : x+y$는 유리수이다., $q : x$, y는 유리수이다.

③ $p : xy > x+y > 4$, $q : x > 2$이고 $y > 2$

④ $p : xy+1 > x+y > 2$, $q : x > 1$이고 $y > 1$

⑤ $p : xyz = 0$, $q : xy = 0$

해설

① $p : x+y \geq 2 \Rightarrow q$: $x \geq 1$ 또는 $y \geq 1$ (반례 : $x = 2$, $y = -1$)

② $p : x+y$ 는 유리수이다. $\Rightarrow q : x$, y는 유리수이다. (반례 : $x = 1-\sqrt{2}$, $y = 1+\sqrt{2}$)

③ $p : xy > x+y > 4 \Rightarrow q : x > 2$ 이고 $y > 2$ (반례 : $x = 4$, $y = 2$)

④ $p : xy+1 > x+y > 2 \Leftrightarrow q : x > 1$ 이고 $y > 1$

⑤ $p : xyz = 0 \Rightarrow q : xy = 0$ (반례 : $x = 1$, $y = 1$, $z = 0$)

13. 조건 $p,\ q,\ r,\ s$에서 $p,\ q$는 어느 것이나 r이기 위한 충분조건, s는 r이기 위한 필요조건, q는 s이기 위한 필요조건이라 한다. 이 때, r은 s이기 위한 무슨 조건인가 ?

① 필요조건　　② 충분조건

③ 필요충분조건　　④ 아무 조건도 아니다.

⑤ 위 사실로는 알 수 없다.

해설

p는 r이기 위한 충분조건이므로
$p \Rightarrow r$ 같은 방법으로 하면
주어진 조건으로부터 $q \Rightarrow r,\ r \Rightarrow s,\ s \Rightarrow q$
$\therefore r \Rightarrow s$ 이고 $s \Rightarrow r$ 이므로 $r \leftrightarrow s$
따라서, r은 s이기 위한 필요충분조건이다.

$$\begin{tikzcd} & q \arrow[dl, Rightarrow] & \\ p \arrow[r, Rightarrow] & r \arrow[r, Rightarrow] & s \arrow[ul, Rightarrow] \end{tikzcd}$$

14. $a > 0, b > 0$일 때, $\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{4}{a}\right)$의 최솟값은?

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{4}{a}\right) = ab + 4 + 1 + \frac{4}{ab}$

ab와 $\frac{4}{ab}$가 양수이므로

$ab + \frac{4}{ab} \geq 2 \cdot \sqrt{ab \cdot \frac{4}{ab}} = 4$

$\therefore ab + \frac{4}{ab} + 5 \geq 4 + 5 = 9$

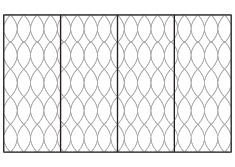
15. $a^2+b^2=4,\ x^2+y^2=9$일 때, $ax+by$가 취하는 값의 범위를 구하면 ?

① $-4 \le ax+by \le 4$
② $-9 \le ax+by \le 9$
③ $-6 \le ax+by \le 6$
④ $0 \le ax+by \le 36$
⑤ $-36 \le ax+by \le 36$

해설

$a^2+b^2=4,\ x^2+y^2=9$이면
$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \ge (ax+by)^2$에서
$4 \cdot 9 \ge (ax+by)^2$
$\therefore -6 \le ax+by \le 6$

16. 어떤 농부가 길이 60 m의 철망을 가지고 아래 그림과 같이 네 개의 작은 직사각형으로 이루어진 직사각형 모양의 우리를 만들려고 한다. 이 때, 전체 우리의 넓이의 최댓값은?



① 60m^2　② 70m^2　③ 80m^2
④ 90m^2　⑤ 100m^2

해설

전체 직사각형의 가로를 a, 세로를 b라 하면
$2a + 5b = 60$
a, b는 양수이므로
$60 = 2a + 5b \geq 2\sqrt{2a \cdot 5b}$
양변을 제곱하면 $40ab \leq 60^2$
$\therefore\ ab \leq 90$
한편, 직사각형의 넓이는 $S = ab$이므로
$S = ab \leq 90$
따라서, 넓이의 최댓값은 $90(\text{m}^2)$

17. 다음 보기의 명제 중 참인 것을 모두 고르면?

㉠ $a > b$이면 $a^2 > b^2$이다.
㉡ 정사각형은 마름모이다.
㉢ 임의의 유리수 x 에 대하여 $\sqrt{2}x$는 무리수이다.
㉣ $a + b > 0$이면 $a > 0$이고 $b > 0$이다.
㉤ x가 6의 약수이면 x 는 12의 약수이다.

① ㉠, ㉡ ② ㉡, ㉢ ③ ㉢, ㉣ ④ ㉡, ㉤ ⑤ ㉣, ㉤

해설

(반례) ㉠ $a = 1, b = -4$ ㉢ $x = 0$ ㉣ $a = 5, b = -4$
$\therefore$ ㉡, ㉤만 참이다.

18. 명제 '$x > 1$ 인 어떤 x 에 대하여 $x^2 < 1$ 또는 $x^2 = 1$ '의 부정은?

① $x \le 1$ 인 모든 x 에 대하여 $x^2 > 1$

② $x > 1$ 인 모든 x 에 대하여 $x^2 > 1$

③ $x < 1$ 인 모든 x 에 대하여 $x^2 \ge 1$

④ $x > 1$ 인 모든 x 에 대하여 $x^2 \ge 1$

⑤ $x \le 1$ 인 모든 x 에 대하여 $x^2 \ge 1$

해설

$x > 1$은 대전제이므로 부정이 적용되지 않는다.
$\sim$ (어떤x) $\leftrightarrow$ (모든 x), $\sim$ (또는) $\leftrightarrow$ (그리고),
$\sim (x^2 < 1) \leftrightarrow (x^2 \ge 1)$, $\sim (x^2 = 1) \leftrightarrow (x^2 \ne 1)$
따라서 주어진 명제의 부정은 '$x > 1$ 인 모든 x 에 대하여 $x^2 > 1$ '이다.

19. 전체집합을 $U = \{-1,\ 0,\ 1\}$이라 할 때, 전체집합 U에 대하여 다음 중 참인 명제는?

① 모든 x에 대하여 $x^2 > 1$이다.

② 임의의 x, y에 대하여 $x + y \le 1$이다.

③ 어떠한 x에 대하여도 $x^2 + 2x \ge -1$ 이다.

④ 적당한 x, y에 대하여 $x^2 - y^2 > 1$이다.

⑤ $x^2 + x < x^3$ 인 x가 존재한다.

해설

① 반례 : $x = 0$ 일 때 $x^2 = 0$ 이므로 주어진 명제 는 거짓이다.
② 반례 : $x = y = 1$ 일 때 $x + y = 2 \ge 1$ 이므로 주 어진 명제는 거짓이다.
③ 모든 x 에 대하여 $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \ge 0$ 이므로 주어진 명제는 참이다.
④ 모든 x, y 에 대하여 $x^2 - y^2 \le 1$ 이므로 주어진 명제는 거짓이다.
⑤ 모든 x 에 대하여 $x^2 + x \ge x^3$ 이므로 주어진 명제는 거짓이다.

20. 아래의 두 조건에 대하여 명제 $p \to q$ 가 거짓임을 보이는 반례들의 집합을 구하면?

「p : x 는 18 의 약수, q : x 는 12 의 약수」

① $\{1, 2, 3, 6\}$ ② $\{6, 12, 9, 8\}$ ③ $\{9, 18\}$
④ $\{12, 18\}$ ⑤ $\{6, 9, 18\}$

해설

두 조건 p , q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 하면, $P = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$, $Q = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 이므로 반례들의 집합은 $P - Q = \{9, 18\}$

21. 다음 두 진술이 모두 참이라 할 때 다음 중 옳은 것은?

㉠ 수학을 잘하는 학생은 머리가 좋다. ㉡ 수학을 잘하는 학생은 물리 또는 컴퓨터를 잘한다.

① 수학을 잘하는 학생은 물리를 잘한다.

② 컴퓨터를 잘하는 학생은 머리가 좋다.

③ 머리가 좋은 학생은 물리를 잘 한다.

④ 컴퓨터를 잘 못하는 학생은 수학을 잘 못한다.

⑤ 물리와 컴퓨터를 잘 못하는 학생은 수학을 잘 못한다.

해설

p : 수학을 잘하는 학생, q : 머리가 좋다, r : 물리 또는 컴퓨터를 잘 한다.$p \Rightarrow q$, $p \Rightarrow r$에서 대우명제도 참이므로$\sim q \Rightarrow \sim p$ 에서 '머리가 좋지 않은 학생은 수학을 잘 못한다.'$\sim r \Rightarrow \sim p$ 에서 '물리와 컴퓨터를 잘 못하는 학생은 수학을 잘 못한다.'

22. 세 수 2^{60}, 3^{40}, 5^{30} 의 대소를 바르게 비교한 것은?

① $5^{30} < 3^{40} < 2^{60}$
② $3^{40} < 2^{60} < 5^{30}$
③ $3 < 5^{30} < 2^{60}$
④ $2^{60} < 5^{30} < 3^{40}$
⑤ $2^{60} < 3^{40} < 5^{30}$

해설

$\frac{2^{60}}{3^{40}} = \left(\frac{2^3}{3^2}\right)^{20} = \left(\frac{8}{9}\right)^{20} < 1$ 따라서 $2^{60} < 3^{40}$

$\frac{3^{40}}{5^{30}} = \left(\frac{3^4}{5^3}\right)^{10} = \left(\frac{81}{125}\right)^{10} < 1$ 따라서 $3^{40} < 5^{30}$

$\therefore 2^{60} < 3^{40} < 5^{30}$

23. 두 집합 $A = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$, $B = \{4,\ 10\}$에 대하여 $A \cap X = X$, $B \cup X = X$를 만족하는 집합 X의 개수를 구하여라.

▶ 답 : _____ 개

▷ 정답 : 8 개

해설

$A \cap X = X$ 이므로 $X \subset A$, $B \cup X = X$ 이므로 $B \subset X$ $\quad \therefore B \subset X \subset A$

즉, $\{4,\ 10\} \subset X \subset \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$

따라서 집합 X는 집합 A의 부분집합 중 원소 4, 10을 반드시 포함하는 집합이므로 개수는

$2^{5-2} = 2 \times 2 \times 2 = 8$ (개) 이다.

24. 전체집합 $U = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A = \{2, 6, 8\}$, $B^C \cap A = \{8\}$ 일 때, 집합 B 가 될 수 있는 모든 집합의 개수를 구하여라.

▶ 답 : _____ 개

▷ 정답 : 4 개

해설

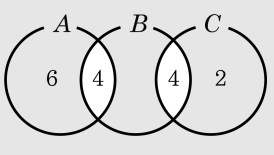
$A = \{2, 6, 8\}$, $B^C \cap A = \{8\}$ 이므로 남은 원소는 4, 10 이므로 B 가 될 수 있는 모든 집합의 개수는 4개이다.

25. 세 집합 $A,\ B,\ C$에 대하여$n(A) = 10, n(B) = 8, n(C) = 6$, $n(A \cup B) = 14, n(B \cup C) = 10, A \cap C = \varnothing$일 때, $n(A \cup B \cup C)$를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설



$A \cap C = \varnothing$ 이므로 $A \cap B \cap C = \varnothing$

$\therefore\ n(A \cap C) = 0,\ n(A \cap B \cap C) = 0$

그런데, $n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B) = 10 + 8 - 14 = 4$ $n(B \cap C) = n(B) + n(C) - n(B \cup C) = 8 + 6 - 10 = 4$ 이므로 $n(A \cup B \cup C)$

$= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$

$= 10 + 8 + 6 - 4 - 4 - 0 + 0 = 16$