1. $x^2 \neq 1$ 이고, $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ 이라 할 때, $f(-x)$ 를 $f(x)$ 를 사용해서 나타내면 무엇인지 고르면?

① $f(x)$ ② $-f(x)$ ③ $\{f(x)\}^2$
④ $\dfrac{1}{f(x)}$ ⑤ $2f(x)$

해설

$$f(-x) = \frac{-x+1}{-x-1} = \frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)} = \frac{1}{f(x)}$$

2. 집합 $X = \{1, 2\}$ 를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x) = ax - 3,\ g(x) = 2x + b$ 에 대하여 $f = g$ 가 되도록 하는 상수 $a,\ b$ 에 대하여 $a - b$ 의 값을 구하면?

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

$f(1) = g(1)$ 에서 $a - 3 = 2 + b$

$\therefore\ a - b = 5 \cdots$ ㉠

$f(2) = g(2)$ 에서 $2a - 3 = 4 + b$

$\therefore\ 2a - b = 7 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡ 에서 $a = 2,\ b = -3$

$\therefore\ a - b = 2 - (-3) = 5$

3. $X = \{x \mid -1 \le x \le 2\}$, $Y = \{y \mid 0 \le y \le 3\}$ 일 때 함수$f : X \to Y, y = ax + b(a < 0)$ 가 일대일 대응이 되는상수 a, b 의 값의 합은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$f(x) = ax + b$ 는 $a < 0$ 이므로 감소함수이다.
$\therefore\ x = -1$ 일 때, $f(x)$ 는 최대이고
$-a + b = 3$
$x = 2$ 일 때 $f(x)$ 는 최소이며
$2a + b = 0$ 두 식을 연립하면 $a = -1, b = 2$
$\therefore\ a + b = 1$

4. 다음 보기의 함수 중에서 일대일 대응인 것은 모두 몇 개인가?

보기

㉠ $f(x) = -x^2 + 1$

㉡ $g(x) = -x + 1$

㉢ $h(x) = x^3$

㉣ $i(x) = 2$

㉤ $j(x) = |2x - 1| \quad (x \geq 1)$

① 1 개　② 2 개　③ 3 개　④ 4 개　⑤ 5 개

해설

일대일 대응이란 정의역이 x 에 치역 y 가
하나씩 대응 될 때를 말한다.
㉠, ㉣ 일대일 대응이 아니다.
㉡ 함수가 아니다.
따라서 일대일 대응인 것은 ㉡, ㉢, ㉤ 3개이다.

5. 집합 X를 정의역으로 하는 함수 $f(x)=x^2+2x$가 항등함수가 되도록 하는 집합 X의 개수는 몇 개인가? (단, $X \neq \phi$)

① 1 개　② 2 개　③ 3 개　④ 4 개　⑤ 5 개

해설

$f(x)=x^2+2x$가 항등함수가 되려면
$f(x)=x$를 만족해야 한다.
즉, $x^2+2x=x$에서
$x^2+x=0,\ x(x+1)=0$
$\therefore\ x=-1,\ 0$
따라서 집합 X는 집합 $\{-1,\ 0\}$의
공집합이 아닌 부분집합이므로
집합 X의 개수는 $2^2-1=3$(개)

6. 실수를 원소로 갖는 집합 X 가 정의역인 두 함수 $f(x) = 3x^2$, $g(x) = x^3 + 2x$ 에 대하여 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 서로 같을 때, 집합 X 의 개수를 구하면? (단, $X \neq \varnothing$)

① 1 개 ② 3 개 ③ 4 개 ④ 7 개 ⑤ 8 개

해설

$f(x) = g(x)$ 일 때, $f(x) - g(x) = h(x)$ 로 놓으면,
($h(x)$ 의 근의 개수) = (집합 X 의 개수)
$x^3 + 2x - 3x^2 = 0$
$x(x^2 - 3x + 2) = x(x-1)(x-2) = 0$
$x = 0, 1, 2$
x 가 집합 X 의 원소이고 $X \neq \varnothing$ 이므로
집합 X 의 개수는 $2^3 - 1 = 7$(개)

7. 세 함수 f, g, h 를 다음과 같이 정의할 때, 다음 중 합성함수가 정의되지 <u>않는</u> 것은?

$$f(x) = x - 1 \qquad (1 \le x \le 3)$$
$$g(x) = (x - 1)^2 \qquad (0 \le x \le 3)$$
$$h(x) = x^3 \qquad (0 \le x \le 4)$$

① $g \circ f$ ② $h \circ f$ ③ $h \circ g$

④ $h \circ g \circ f$ ⑤ $h \circ f \circ g$

해설

일반적으로 함수 f, g 에서 (f 의 치역)$\subset$ (g 의 정의역) 이면 합성함수 $g \circ f$ 를 정의할 수 있다.
$f(x)$ 의 치역은 $\{y \mid 0 \le y \le 2\}$,
$g(x)$ 의 치역은 $\{y \mid 0 \le y \le 4\}$,
$h(x)$ 의 치역은 $\{y \mid 0 \le y \le 64\}$ 이므로
①, ②, ③, ④의 합성함수는 모두 정의된다.
⑤ $g(x)$ 의 치역이 $\{y \mid 0 \le y \le 4\}$이고
$f(x)$ 의 정의역이 $\{x \mid 1 \le x \le 3\}$ 이므로 (g 의 치역) $\not\subset$ (f 의 정의역)
따라서 $f \circ g$ 가 정의되지 않으므로 $h \circ f \circ g$ 도 정의되지 않는다.

8. 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에서 X로의 함수 $f : X \to X$를 다음과 같이 정의한다.

$$f(x)\begin{cases} x+1 & (x \le 3) \\ 1 & (x = 4) \end{cases}$$

이 때, $g : X \to X$에 대하여 $g(1) = 3$이고 $f \circ g = g \circ f$가 성립할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $g(2) < g(3) < g(4)$
② $g(2) < g(4) < g(3)$
③ $g(3) < g(2) < g(4)$
④ $g(3) < g(4) < g(2)$
⑤ $g(4) < g(3) < g(2)$

해설

$f(1) = 2,\ f(2) = 3,\ f(3) = 4,\ f(4) = 1$임을 이용하여
$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(3) = 4$
$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(2)$ $(\therefore f \circ g = g \circ f)$
$\therefore\ g(2) = 4$
$(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(4) = 1$
$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(3)$
$\therefore\ g(3) = 1$
$(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(1) = 2$
$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(4)$
$\therefore\ g(4) = 2$
$\therefore\ g(3) < g(4) < g(2)$

9. 두 함수 $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = -x + k$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 가 성립할 때, 상수 k 의 값은?

① -5 ② -6 ③ -7 ④ -8 ⑤ -9

해설

$f \circ g = g \circ f$ 에서 $-2x + 2k + 3 = -2x - 3 + k$
$\therefore\ k = -6$

10. $f(x) = 2x + 3$일 때, $g(x)$가 $(g \circ f)^{-1}(x) = 2x$를 만족시킨다고 한다. 이 때, $g(1)$의 값은?

① $-\frac{1}{2}$　　② $\frac{1}{2}$　　③ $-\frac{1}{4}$　　④ $\frac{1}{4}$　　⑤ $-\frac{1}{5}$

해설

$(g \circ f)^{-1}(x) = 2x$ 이므로 $(g \circ f)(x) = \frac{1}{2}x$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x+3) = \frac{1}{2}x$

여기서 $2x + 3 = t$ 라 하면 $x = \frac{t-3}{2}$

$\therefore\ g(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{t-3}{2}$

$\therefore\ g(1) = -\frac{1}{2}$

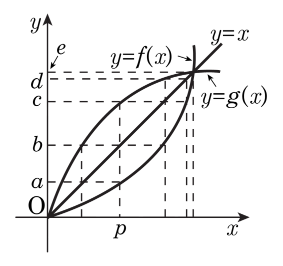
11. $f(x)=x+1$, $g(x)=3x-2$ 일 때, $(g\circ h)(x)=f(x)$ 를 만족시키는 함수 $h(x)$ 를 구하면?

① $h(x)=\frac{1}{3}x+1$
② $h(x)=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$
③ $h(x)=x+\frac{1}{3}$
④ $h(x)=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$
⑤ $h(x)=\frac{2}{3}x+1$

해설

$f(x)=x+1$, $g(x)=3x-2$ 일 때,
$(g\circ h)(x)=f(x)$ 를 만족해야 하므로
$(g\circ h)(x)=g(h(x))=3h(x)-2$
$3h(x)-2=x+1$, $3h(x)=x+3$
$\therefore h(x)=\frac{1}{3}x+1$

12. 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, $(f \circ g)(p)$ 의 값은 얼마인가? (단, 점선은 x 축 또는 y 축에 평행하다.)



① a ② b ③ c

④ d ⑤ e

해설

주어진 그림에서 $g(p) = c, f(c) = b$

$\therefore (f \circ g)(p) = f(g(p)) = f(c) = b$

13. 함수 $f(x)=x^2-x-2$, $g(x)=x^2+ax+3$ 일 때, 모든 실수에 대하여 $(f\circ g)(x)\ge 0$이 되는 실수 a의 범위는? (단, $f\circ g$는 g와 f의 합성함수이다.)

① $a\le -3, a\ge 2$　② $-1\le a\le 1$　③ $a\le -2, a>3$

④ $-2\le a\le 2$　⑤ $-1\le a\le 3$

해설

$g(x)=t$라 두면,

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(t)=t^2-t-2\ge 0$에서

$t\le -1,\ t\ge 2$에서

(i) $t\le -1$

$x^2+ax+3\le -1$

$x^2+ax+4\le 0$ (부적절)

(ii) $t\ge 2$

$x^2+ax+3\ge 2$

$x^2+ax+1\ge 0$에서

$D=a^2-4\le 0$

$\therefore\ -2\le a\le 2$

14. 자연수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(n)=\begin{cases} n-2 & (n \geq 100\text{일때}) \\ f(f(n+4)) & (n<100\text{일때}) \end{cases}$$

에서 $f(96)$ 의 값을 구하면?

① 78 ② 80 ③ 98 ④ 99 ⑤ 100

해설

$f(96)=f(f(100)),\ f(100)=98,$
$f(98)=f(f(102)),\ f(102)=100$
$\therefore f(96)=98$

15. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 $f(1)=3$ 이고, 모든 실수 x 에 대하여

$f(x+1)=\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$ 를 만족시킨다. 이 때, $f(1998)$ 의 값은?

① 3　　② 2　　③ −1　　④ −2　　⑤ −3

해설

$$f(2)=\frac{1+f(1)}{1-f(1)}=\frac{1+3}{1-3}=-2$$

$$f(3)=\frac{1+f(2)}{1-f(2)}=\frac{1-2}{1+2}=-\frac{1}{3}$$

$$f(4)=\frac{1+f(3)}{1-f(3)}=\frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$$

$$f(5)=\frac{1+f(4)}{1-f(4)}=\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=3$$

$f(5)=f(1)=3$ 이므로

$f(6)=f(2)=-2$, $f(7)=f(3)=-\dfrac{1}{3}$

$f(8)=f(4)=\dfrac{1}{2}$, $f(9)=f(5)=f(1)=3,\cdots$

이와 같이 $f(n)$ (n 은 자연수)은

$3,\ -2,\ -\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{2}$ 이 반복됨을 알 수 있다.

$\therefore\ f(4n+k)=f(k)$

(단, n 은 0 이상의 정수, $k=0,\ 1,\ 2,\ 3$)

그러므로 $f(1998)=f(4\times 499+2)=f(2)=-2$

16. 함수 $f(x)=\dfrac{-3x+1}{x+3}$ 에 대하여 $f^1=f,\ f^{n+1}=f\circ f^n(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 이라 할 때, $f^{2006}(-2)+f^{2007}(-2)$ 의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$f(-2)=\dfrac{6+1}{-2+3}=7$

$f^2(-2)=f(f(-2))=f(7)=-2$

$f^3(-2)=f(f^2(-2))=f(-2)=7$

$f^4(-2)=f(f^3(-2))=f(7)=-2$

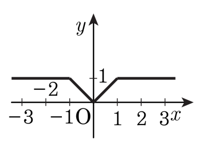
$\vdots$

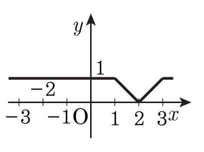
$f^{2006}(-2)=-2$

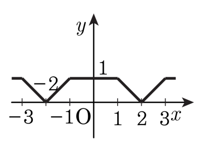
$f^{2007}(-2)=7$

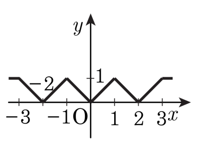
$\therefore\ f^{2006}(-2)+f^{2007}(-2)=-2+7=5$

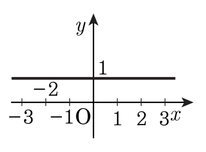
17. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 f, g 가 각각 $f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \geq 1) \\ |x| & (|x| < 1) \end{cases}$, $g(x) = x - 2$ 일 때, 합성함수 $f \circ g$의 그래프는?

①


②


③


④


⑤


해설

$f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \geq 1) \\ |x| & (|x| < 1) \end{cases}$

$g(x) = x - 2$ 에서

$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 1 & (|x-2| \geq 1) \\ |x-2| & (|x-2| < 1) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 1 & (x \leq 1 \text{ 또는 } x \geq 3) \\ |x-2| & (1 < x < 3) \end{cases}$