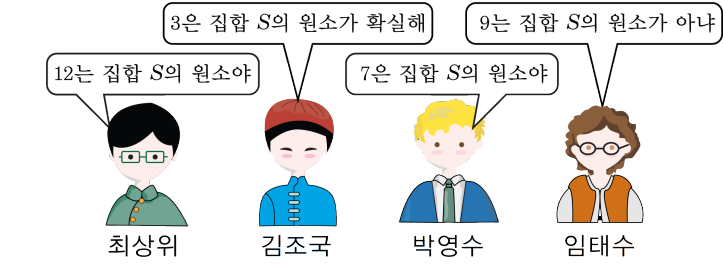


1. 10 이하의 3의 배수의 집합을 S 라고 할 때, 다음 중 올바르게 말한 사람을 찾아라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 김조국

해설

10 이하의 3의 배수는 3, 6, 9이다.
 $\therefore S = \{3, 6, 9\}$
최상위 : 12는 집합 S 의 원소가 아니다.
김조국 : 3은 집합 S 의 원소이다.
박영수 : 7은 집합 S 의 원소가 아니다.
임태수 : 9는 집합 S 의 원소이다.

2. 세 집합 $A = \{x \mid 0 < x < 1, x \text{는 홀수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 한 자리의 짝수}\}$, $C = \{x \mid x \text{는 3 이하의 자연수}\}$ 일 때, $n(A) + n(B) + n(C)$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$A = \{x \mid 0 < x < 1, x \text{는 홀수}\} = \emptyset$ 이므로
 $n(A) = 0$,
 $B = \{x \mid x \text{는 한자리의 짝수}\} = \{2, 4, 6, 8\}$ 이므로
 $n(B) = 4$,
 $C = \{x \mid x \text{는 3 이하의 자연수}\} = \{1, 2, 3\}$ 이므로
 $n(C) = 3$ 이다.
따라서 $n(A) + n(B) + n(C) = 7$ 이다.

3. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 1 \text{ 이상 } 10 \text{ 이하의 소수}\}$ 에 대하여 다음 중 옳은 것은?
(단, 소수는 1보다 큰 자연수 중에 1과 자기 자신만을 약수로 가지는 수이다.)
- ① $4 \in A$
 - ② $\emptyset \in A$
 - ③ $\{3, 7\} \in A$
 - ④ $\{x \mid x = 2 \times n, n = 1, 2, 3, 4\} \subset A$
 - ⑤ $A \subset \{2, 3, 5, 7\}$

해설

- ① $4 \notin A$
- ② $\emptyset \subset A$
- ③ $\{3, 7\} \subset A$
- ④ $\{2, 4, 6, 8\} \not\subset A$
- ⑤ $A \subset \{2, 3, 5, 7\}$

4. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 의 부분집합 중 원소가 2 개인 집합은 a 개이고, 원소가 5 개인 집합은 b 개이다. 이때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 42

해설

집합 A 의 원소 2 개를 짝짓는 방법은

$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 6\},$
 $\{1, 7\},$
 $\{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{2, 6\}, \{2, 7\},$
 $\{3, 4\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}, \{3, 7\}$
 $\{4, 5\}, \{4, 6\}, \{4, 7\}$
 $\{5, 6\}, \{5, 7\},$
 $\{6, 7\}$

따라서, 원소가 2 개인 부분집합의 개수는

$6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$ (개)이다.

집합 A 의 부분집합 중 원소가 5 개인 집합은 원소 2 개를 짝짓고 남은 5 개의 원소를 원소로 갖는 집합이므로 원소가 2 개인 부분집합의 개수와 같은 개수의 부분집합이 만들어진다. 즉 21 개가 된다.

$a = 21, b = 21$ 이므로 $a + b = 42$

5. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 10\text{보다 작은 소수}\}$ 의 부분집합 중 원소 2, 3을 반드시 포함하고 원소의 개수가 4개인 부분집합의 원소의 합은? (단, 소수는 1보다 큰 자연수 중 1과 자기 자신만을 약수로 가지는 수이다.)
- ① 17 ② 18 ③ 19 ④ 20 ⑤ 21

해설

$A = \{2, 3, 5, 7\}$ 에서 원소 2, 3를 제외한 $\{5, 7\}$ 의 부분집합은 $\emptyset, \{5\}, \{7\}, \{5, 7\}$ 의 4개가 있으므로, 원소 2, 3을 반드시 포함하는 집합 A 의 부분집합은 $\{2, 3\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 3, 7\}, \{2, 3, 5, 7\}$ 이다. 이 중 원소의 개수가 4개인 것은 $\{2, 3, 5, 7\}$ 이므로 원소의 합은 $2 + 3 + 5 + 7 = 17$ 이다.

6. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 20 \text{보다 작은 소수}\}$ 의 부분집합 중에서 한 자리의 자연수를 모두 포함하는 부분집합의 개수는?

① 4개 ② 10개 ③ 12개 ④ 16개 ⑤ 20개

해설

$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ 의 부분집합 중 원소 2, 3, 5, 7을 모두 포함하는 부분집합의 개수는

$$2^{8-4} = 2^4 = 16 \text{ (개)}$$

7. 집합 $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ 의 부분집합 중에서 원소 2, 5를 포함하는 부분집합의 개수가 32개일 때, n 의 값은?

① 4

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 8

해설

집합 A 의 원소의 개수는 n 개 이므로 원소 2, 5를 포함하는 부분집합의 개수는

$$2^{n-2} = 32 = 2^5 \quad \therefore n = 7$$

8. 두 집합 $A = \{5, 9, a - 2\}$, $B = \{5, 7, b + 3\}$ 에 대하여 집합 A 는 집합 B 에 포함되고, 집합 B 는 집합 A 에 포함될 때, 상수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값은?

① 3

② 7

③ 11

④ 15

⑤ 19

해설

$A \subset B$, $B \subset A$ 이므로 $A = B$ 이다.

$7 \in A$ 이므로 $a - 2 = 7$

$\therefore a = 9$

$9 \in B$ 이므로 $b + 3 = 9$

$\therefore b = 6$

$\therefore a + b = 9 + 6 = 15$

9. 세 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 4\text{의 약수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 24\text{의 약수}\}$, $C = \{x \mid x \text{는 } 10\text{이상 } 20\text{미만의 자연수}\}$ 에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?
(정답 2 개)

- ① $A \cap B \cap C = \{4\}$
- ② $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 24\}$
- ③ $A \cap (B \cup C) = \{1, 2, 4\}$
- ④ $(A \cup B) \cap C = \{1, 2, 4, 12\}$
- ⑤ $(A \cup B) \cap C = \{12\}$

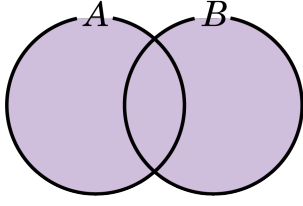
해설

$A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

① $A \cap B \cap C = \emptyset$

④ $(A \cup B) \cap C = \{12\}$

10. 집합 $A = \{x \mid x = 2 \times n - 1, n \text{은 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$, $B = \{5, 7, 9, 17, 19\}$ 일 때 다음 벤 다이어그램에서의 색칠한 부분의 집합은?



- ① $\{1, 3, 5, 9, 11, 13, 17\}$
- ② $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$
- ③ $\{1, 5, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$
- ④ $\{1, 5, 13, 19\}$
- ⑤ $\{1, 5, 13, 19, 21, 23\}$

해설

조건제시법을 원소나열법으로 고쳐보면
 $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$ 이다.

11. 두 집합 $A = \{a-1, a+2, 4\}$, $B = \{b-3, b+1, 5\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{4, 5, c\}$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라. (단, $c \neq 4, c \neq 5$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$A \cap B = \{4, 5, c\}$ 이므로 $\{4, 5, c\} \subset \{a-1, a+2, 4\}$, $\{4, 5, c\} \subset \{b-3, b+1, 5\}$

즉, $5 = a-1$ 또는 $5 = a+2$, $4 = b-3$ 또는 $4 = b+1$.

i) $a = 6, b = 7$ 일 때, $A = \{5, 8, 4\}$, $B = \{4, 8, 5\}$ 이므로

$A \cap B = \{4, 5, 8\}$

ii) $a = 6, b = 3$ 일 때, $A = \{5, 8, 4\}$, $B = \{0, 4, 5\}$ 이므로

$A \cap B = \{4, 5\}$

iii) $a = 3, b = 7$ 일 때, $A = \{2, 5, 4\}$, $B = \{4, 8, 5\}$ 이므로

$A \cap B = \{4, 5\}$

iv) $a = 3, b = 3$ 일 때, $A = \{2, 5, 4\}$, $B = \{0, 4, 5\}$ 이므로

$A \cap B = \{4, 5\}$

i)~iv)에서 문제의 조건을 만족하는 것은 i)의 경우이며 $a=6, b=7, c=8$ 이다.

따라서 $a+b+c=21$ 이다.

12. 두 집합 A, B 에 대하여 $A \cup B$ 와 집합 B 가 다음과 같을 때, 다음 중 집합 A 가 될 수 없는 것은?

$A \cup B = \{x|x \text{는 } 8 \text{의 약수}\}, B = \{x|x \text{는 } 3 \text{미만의 자연수}\}$

- ①

{1, 4, 8}
- ②

{ $x|x$ 는 5보다 큰 2의 배수}
- ③

{ $x|x$ 는 10보다 작은 4의배수}
- ④

{ $x|x$ 는 8의 약수}
- ⑤

{ $x|x$ 는 12의 약수}

해설

집합 $B = \{1, 2\}$ 이고, $A \cup B = \{1, 2, 4, 8\}$ 이므로
집합 A 는 원소 4, 8 을 반드시 포함하는 $A \cup B$ 의 부분집합이다.
⑤ { $x|x$ 는 12의 약수} = {1, 2, 3, 4, 6, 12} $\not\subset$ {1, 2, 4, 8}

13. $A \subset B$ 이고 $n(A) = 10$, $n(B) = 22$ 일 때, $n(A \cap B)$, $n(A \cup B)$ 의 합은?

① 10 ② 15 ③ 18 ④ 22 ⑤ 32

해설

$A \subset B$ 이므로 $A \cap B = A$, $A \cup B = B$ 이다.

$$n(A \cap B) = n(A) = 10$$

$$n(A \cup B) = n(B) = 22$$

$$\therefore n(A \cap B) + n(A \cup B) = 10 + 22 = 32$$

14. 우리 반 학생 56명 중에서 제주도에 가 본 학생이 35명, 일본에 가 본 학생이 21명, 제주도에도 일본에도 가 보지 못한 학생이 8명일 때, 제주도와 일본에 모두 가 본 학생을 몇 명인지 구하여라.

▶ 답: 명

▶ 정답 : 8 명

해설

제주도에 가 본 학생을 집합 A 라 하고, 일본에 가 본 학생을 집합 B 라 하자.

제주도에도 일본에도 가 보지 못한 학생이 8 명이므로 $n(A \cup B) = 56 - 8 = 48$ 이다.

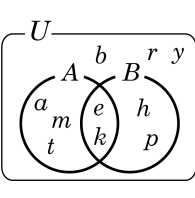
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$48 = 35 + 21 - x$$

 $x = 8$ 이다.

그러므로 제주도와 일본에 모두 가 본 학생, 즉 $n(A \cap B) = 8$

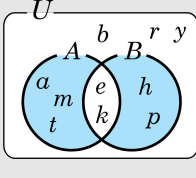
15. 아래 벤 다이어그램에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?



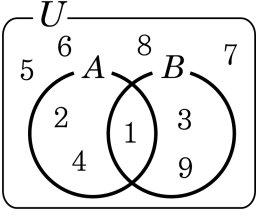
- ① $A - B = \{a, t, m\}$
- ② $B - A = \{h, p\}$
- ③ $(A - B)^c = \{b, e, h, k, p, r, y\}$
- ④ $(A \cup B) - (A \cap B) = \{a, e, h, m, p, t\}$
- ⑤ $A - B^c = \{e, k\}$

해설

④ $(A \cup B) - (A \cap B) = \{a, h, m, p, t\}$



16. 전체집합을 U 와 두 부분집합 A, B 가 다음 벤 다이어그램과 같을 때, 다음 중 옳지 않은 것은?



- ① $A - B = \{2, 4\}$
- ② $B \cap A^c = \{3, 9\}$
- ③ $(A^c)^c = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- ④ $(A \cup B)^c = \{5, 6, 7, 8\}$
- ⑤ $A^c \cap B^c = \{5, 6, 7, 8\}$

해설

$(A^c)^c = \{1, 2, 4\} = A$

17. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $n(U) = 50$, $n(A) = 24$, $n(A \cap B) = 15$, $n(A^c \cap B^c) = 9$ 일 때, 집합 B 의 원소의 개수는?

- ① 2개 ② 4개 ③ 8개 ④ 16개 ⑤ 32개

해설

$$\begin{aligned}n(A^c \cap B^c) &= n((A \cup B)^c) = 9, \\n(A \cup B) &= n(U) - n((A \cup B)^c) = 50 - 9 = 41 \\n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B), \\41 &= 24 + n(B) - 15 \\\therefore n(B) &= 32\end{aligned}$$

18. 100명의 학생에게 야구, 축구의 선호도를 조사하였더니, 야구를 좋아하는 학생이 67명, 축구를 좋아하는 학생이 56명, 야구와 축구를 모두 싫어하는 학생이 23명이었다. 축구만 좋아하는 학생 수를 구하여라.

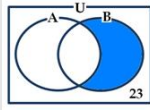
▶ **답:** 명

▶ 정답 : 10명

해설

전체집합을 U , 야구를 좋아하는 학생을 A , 축구를 좋아하는 학생을 B 라 하자. 벤다이어그램으로 나타내 보면 $n(A \cup B) =$

$100 - 23 = 77$ 임을 쉽게 알 수 있다.



구하는 것은 그림에서 어두운 부분이고 $n(B-A)$ 이다. $n(B-A) = n(B) - n(A \cap B)$ 이고 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ 이므로 $n(A \cap B) = 67 + 56 - 77 = 46$
 $\therefore$ 축구만 좋아하는 학생 수는 $n(B) - n(A \cap B) = 56 - 46 = 10$

19. 자연수 N 의 배수의 집합을 A_N 이라 할 때, $(A_4 \cap A_6) \supset A_a$ 을 만족하는 a 의 최솟값을 m , $(A_4 \cup A_6) \subset A_b$ 을 만족하는 b 의 최댓값을 M 이라 할 때, $M - m$ 의 값은?

- ① -10 ② 28 ③ 14 ④ 10 ⑤ -14

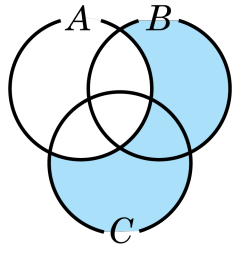
해설

$$(A_4 \cap A_6) \supset A_a \rightarrow m = 12 (\because 4, 6 \text{의 } L.C.M)$$

$$(A_4 \cup A_6) \subset A_b \rightarrow M = 2 (\because 4, 6 \text{의 } G.C.D)$$

$$\therefore M - m = -10$$

20. 다음 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합은?



- ① $A - (B \cup C)$
- ② $A \cap (B \cup C)$
- ③ $(A \cap B) - C$
- ④ $(B \cup C) - A$
- ⑤ $A - (B \cap C)$

해설

①

②

③

⑤

21. 다음 중 참인 명제는?

- ① 2는 홀수이다.
- ② $\sqrt{2}$ 는 유리수이다.
- ③ 99는 100보다 작다.
- ④ $\emptyset$ 은 무한집합이다.
- ⑤ 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 > 0$ 이다.

해설

③ 99는 100보다 작은 것이 사실이므로 참이다.

22. 세 조건 p, q, r 의 진리집합을 P, Q, R 이라 할 때, $P - Q = R$ 을 만족한다. 다음 <보기> 중 항상 참인 명제를 모두 고른 것은?

보기

- $\neg r \rightarrow \sim q$
- $\neg r \rightarrow p$
- $\neg r \rightarrow q$
- $\neg \sim r \rightarrow \sim p$
- $p \rightarrow q$

- ①

$\neg, \neg$
- ②

$\neg, \neg$
- ③

$\neg, \neg$
- ④

$\neg, \neg, \neg$
- ⑤

$\neg, \neg, \neg$

해설

$P - Q = R$
따라서, $R \subset P$ 이고 집합간의 관계를 살펴보면
 $Q = R^c, R = Q^c$ 이 된다.
이를 명제로 표현하면 $r \rightarrow p, q \rightarrow \sim r, r \rightarrow \sim q$ 이므로 참인 명제는 $\neg, \neg$ 이다.

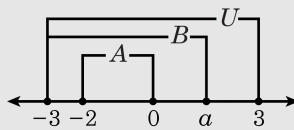
23. $U = \{x | -3 \leq x \leq 3\}$, $A = \{x | -2 \leq x \leq 0\}$, $B = \{x | -3 \leq x \leq a\}$ 라고 할 때, $B^c \subset A^c$ 가 성립하도록 a 의 범위를 정할 때 정수 a 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$B^c \subset A^c \leftrightarrow A \subset B$ 이므로 위의 그림에서 $0 \leq a \leq 3 \therefore a$ 의 최댓값은 3이다.



24. 다음 중 거짓인 명제는?

- ① 자연수 n 에 대하여 n^2 이 짝수이면 n 도 짝수이다.
- ② 자연수 n 에 대하여 n^2 이 홀수이면 n 도 홀수이다.
- ③ 자연수 n 에 대하여 n^2 이 3의 배수이면 n 도 3의 배수이다.
- ④ 자연수에 대하여 두 수가 모두 짝수이면 두 수의 합도 짝수이다.
- ⑤ 자연수에 대하여 두 수의 합이 짝수이면 두 수는 모두 짝수이다.

해설

주어진 명제의 참, 거짓에 대한 직접적인 판단이 어려울 때는 그 명제의 대우가 참인지 확인한다.

- ①, ② 생략
- ③ $n = 3k + 1$ $n^2 = (3n + 1)^2 = 3(3k^2 + 2k) + 1 \neq 3m$ (참)
(대우가 참 $\rightarrow$ 참인 명제)
- ④ 두 수의 합이 홀수이면 두 수 중 적어도 하나는 홀수이다. (참)
- ⑤ 반례 : 두 수 모두 홀수인 경우(거짓)

25. 세 조건 p, q, r 에 대한 다음 추론 중 옳지 않은 것은?

- ① $p \rightarrow \sim q$ 이고 $r \rightarrow q$ 이면 $p \rightarrow \sim r$ 이다.
- ② $p \rightarrow \sim q$ 이고 $\sim r \rightarrow q$ 이면 $p \rightarrow r$ 이다.
- ③ $q \rightarrow \sim p$ 이고 $\sim q \rightarrow r$ 이면 $p \rightarrow r$ 이다.
- ④ $p \rightarrow q$ 이고 $\sim r \rightarrow \sim q$ 이면 $p \rightarrow r$ 이다.
- ⑤ $p \rightarrow q$ 이고 $q \rightarrow p$ 이면 $p \leftrightarrow \sim q$ 이다.

해설

⑤ $p \rightarrow q, q \rightarrow p$ 이면 $p \leftrightarrow q$ 이다.

26. 다음 보기 중 $a^2 + b^2 \neq 0$ 과 동치인 것을 모두 고르면? (단, a, b 는 실수)

- $\textcircled{\text{㉠}}$ $a^2 + b^2 = 0$

$\textcircled{\text{㉡}}$ $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$
- $\textcircled{\text{㉢}}$ $ab \neq 0$

$\textcircled{\text{㉣}}$ $a + b \neq 0$ 이고 $ab = 0$
- $\textcircled{\text{㉤}}$ $a^2 + b^2 > 0$

- ① $\textcircled{\text{㉠}}$

② $\textcircled{\text{㉡}}$

③ $\textcircled{\text{㉢}}$
- ④ $\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}}$

⑤ $\textcircled{\text{㉡}}, \textcircled{\text{㉤}}$

해설

$a^2 + b^2 \neq 0$ 은 a, b 중 적어도 하나는 0이 아니므로 $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$ 이다.
① $a^2 + b^2 = 0$ 이면 $a = 0$ 이고 $b = 0$ 이다.
③ $ab \neq 0$ 이면 $a \neq 0$ 이고 $b \neq 0$ 이다.
④ $a + b \neq 0$ 이고 $ab = 0$ 이면 a, b 둘 중에 하나는 0이 아니다.
⑤ $a^2 + b^2 > 0$ 이면 $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$ 이다. 따라서 $a^2 + b^2 \neq 0$ 과 동치인 것은 ②, ⑤이다.

27. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 $P = \{x \mid x \leq a\}$, $Q = \{x \mid x \leq -1, 2 \leq x \leq 4\}$ 라 하면 p 는 q 이기 위한 필요조건이다. 상수 a 의 최솟값은 얼마인가?

① -2 ② -1 ③ 2 ④ 4 ⑤ 5

해설

필요조건을 만족시키기 위해서는 P 의 집합이 Q 의 집합을 포함해야 하므로 최솟값은 4 가 된다.

28. $a > b > 0$ 인 실수 a, b 에 대하여 $\frac{a}{1+a}$ 와 $\frac{b}{b+1}$ 의 대소 관계는?

① $\frac{a}{1+a} < \frac{b}{1+b}$
③ $\frac{a}{1+a} > \frac{b}{1+b}$
⑤ $\frac{a}{1+a} = \frac{b}{1+b}$

② $\frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b}$
④ $\frac{a}{1+a} \geq \frac{b}{1+b}$

해설

$$\begin{aligned}\frac{a}{1+a} - \frac{b}{1+b} &= \frac{a+ab-b-ab}{(1+a)(1+b)} \\ &= \frac{a-b}{(1+a)(1+b)} > 0 \\ (\because a > b > 0)\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{a}{1+a} > \frac{b}{1+b}$$

해설

$$a > b > 0 \text{ 이면 } \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

$$\text{양변에 1을 더하면 } \frac{1+a}{a} < \frac{1+b}{b}$$

$$\therefore \frac{a}{1+a} > \frac{b}{1+b}$$

29. $a > 0$ 일 때, $x = \sqrt{a^2 + 1}$ 과 $y = a + \frac{1}{2a}$ 의 대소를 비교한 것으로 옳은 것은?

- ① $x \leq y$ ② $x < y$ ③ $x \geq y$ ④ $x > y$ ⑤ $x = y$

해설

$$\begin{aligned}x^2 &= a^2 + 1 \\y^2 &= \left(a + \frac{1}{2a}\right)^2 = a^2 + 1 + \frac{1}{4a^2}, \\ \frac{1}{4a^2} &> 0 \text{ 이므로 } y^2 > x^2 \\ \therefore y &> x\end{aligned}$$

30. 부등식 $2^{50} > 5^{10n}$ 을 만족하는 자연수 n 의 갯수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 2 개

해설

$$\frac{2^{50}}{5^{10n}} = \frac{(2^5)^{10}}{(5^n)^{10}} = \left(\frac{32}{5^n}\right)^{10}$$

이 때 $2^{50} > 5^{10n}$ 이므로 $\left(\frac{32}{5^n}\right) > 1$

$\therefore n = 1, 2$

n 의 갯수는 2 개이다.

31. 다음은 실수 a, b, c 가 모두 양수일 때, $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq 0$ 임을 보이는 과정이다. [㉔] 안에 들어갈 알맞은 식은?

$$\begin{aligned} & a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \\ &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \\ &= \frac{1}{2}(a + b + c)(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca) \\ &= \frac{1}{2}(a + b + c)(a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2) \\ &= \frac{1}{2}(a + b + c) \text{ [㉔]} \geq 0 \end{aligned}$$

- ① $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$
- ② $(a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2$
- ③ $(a + b)^2 - (b + c)^2 - (c + a)^2$
- ④ $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$
- ⑤ $(a - b)^2 - (b - c)^2 - (c - a)^2$

해설

$$\begin{aligned} \text{① } & \{(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2)\} \\ &= (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \end{aligned}$$

32. 서로 다른 두 양수 a, b 에 대하여 다음 중 옳은 것은? (단, $a \neq b$)

① $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$

② $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$

③ $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{2ab}{a+b}$

④ $\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab} \leq \frac{2ab}{a+b}$

⑤ $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$

해설

$a > 0, b > 0$ 일 때, 산술·기하·조화·평균의 관계에서

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b} \quad (\text{등호는 } a=b \text{ 일 때 성립})$$

그런데 문제의 조건에서 $a \neq b$ 이므로

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$$

33. $a > 0, b > 0$ 일 때, $\left(a + \frac{1}{b}\right) \times \left(b + \frac{4}{a}\right)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$a > 0, b > 0$ 이므로 산술기하 평균의 관계에 의해

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= ab + 4 + 1 + \frac{4}{ab} \geq 2 \cdot \sqrt{ab \cdot \frac{4}{ab}} + 5 \\ &= 2 \cdot 2 + 5 = 9\end{aligned}$$

34. a, b, c 가 실수이고 $a^2 + b^2 + c^2 = 2$ 일 때, $a + \sqrt{2}b + c$ 의 값을 P 라 하면, P 의 범위를 구하면?

① $-\sqrt{2} \leq P \leq \sqrt{2}$

② $-2\sqrt{2} \leq P \leq 2\sqrt{2}$

③ $-\sqrt{3} \leq P \leq \sqrt{3}$

④ $-2\sqrt{3} \leq P \leq 2\sqrt{3}$

⑤ $-3\sqrt{3} \leq P \leq 3\sqrt{3}$

해설

a, b, c 가 실수이고 $a^2 + b^2 + c^2 = 2$ 일 때
코시-슈바르츠 부등식을 이용하여
 $(1^2 + \sqrt{2}^2 + 1)(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + \sqrt{2}b + c)^2$
 $4 \cdot 2 \geq (a + \sqrt{2}b + c)^2$
 $\therefore -2\sqrt{2} \leq a + \sqrt{2}b + c \leq 2\sqrt{2}$
 $\Rightarrow -2\sqrt{2} \leq P \leq 2\sqrt{2}$

36. 전체집합 $U = \{x|x \text{는 한 자리 자연수}\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $B = \{2, 4, 6, 8\}, A^c = \{6, 7, 8, 9\}, A^c \cap B^c = \{7, 9\}$ 일 때, $(A - B)^c$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\{2, 4, 6, 7, 8, 9\}$

해설

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
 $A = U - A^c = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 이므로
 $A - B = \{1, 3, 5\}$
 $\therefore (A - B)^c = \{2, 4, 6, 7, 8, 9\}$

37. 전체 집합 $U = \{x \mid |x| \leq 10 \text{인 정수}\}$ 의 두 부분집합 $A = \{x \mid |x| \leq 4 \text{인 정수}\}$, $B = \{x \mid 0 < x < 10 \text{인 소수}\}$ 에 대하여 $A^c \cap B^c$ 을 원소의 합은?

- ① -5 ② -10 ③ -12 ④ -15 ⑤ -18

해설

$U = \{-10, -9, -8, -7, \dots, 7, 8, 9, 10\}$,
 $A = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$,
 $B = \{2, 3, 5, 7\}$
 $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = U - (A \cup B)$ 이고 $A \cup B = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 7\}$ 이므로
 $A^c \cap B^c = \{-10, -9, -8, -7, -6, -5, 6, 8, 9, 10\}$
따라서 원소의 합은 -12

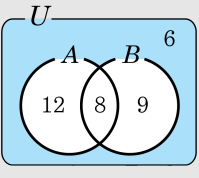
38. 수민이네 반 학생을 대상으로 과목에 대한 선호도를 조사하였더니 음악을 좋아하는 학생이 20명, 체육을 좋아하는 학생이 17명, 음악과 체육을 모두 좋아하는 학생이 8명이고 음악을 좋아하지 않는 학생이 15명이다. 이때, 음악과 체육을 모두 좋아하지 않는 학생 수를 구하여라.

▶ 답 : 명

▷ 정답 : 6 명

해설

주어진 문제를 벤 다이어그램을 활용하여 해결할 수 있다. 벤 다이어그램의 각 영역에 해당하는 학생의 수를 기입하면 다음과 같다.



39. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 p 는 q 이기 위한 충분조건, r 은 q 이기 위한 필요조건, s 는 $\sim r$ 이기 위한 충분조건 일 때 다음 중 옳은 것은?

- ① $r \rightarrow q$
- ② $q \rightarrow \sim p$
- ③ $s \rightarrow \sim q$
- ④ $\sim s \rightarrow \sim p$
- ⑤ $\sim r \rightarrow p$

해설

$p \rightarrow q \quad s \rightarrow \sim r \quad q \rightarrow r$
 $q \rightarrow r$ 의 대우 : $\sim r \rightarrow \sim q$
 $\therefore s \rightarrow \sim r, \sim r \rightarrow \sim q$ 이므로 $s \rightarrow \sim q$

40. $a > 1$ 일 때, $\frac{1}{a-1} + 4a - 3$ 의 최솟값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\frac{1}{a-1} > 0$$

$$4(a-1) + 1 + \frac{1}{a-1} \geq 2 \cdot \sqrt{4(a-1) \cdot \frac{1}{(a-1)}} + 1$$

$$= 2 \cdot 2 + 1 = 5$$