

1. a, b, x, y 가 실수이고, $a^2 + b^2 = 8, x^2 + y^2 = 2$ 일 때 $ax + by$ 의 최댓값과 최솟값의 곱은?

- ① -16 ② -4 ③ 0 ④ 4 ⑤ 16

해설

a, b, x, y 가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
 $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$
 $8 \times 2 \geq (ax + by)^2$
 $\therefore -4 \leq ax + by \leq 4$
(최댓값) \times (최솟값) = -16

2. 조건 p 가 조건 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것을 보기 중에서 모두 고른 것은? (단, a, b 는 실수이다.)

㉠ $p : a \geq b, q : a^2 \geq b^2$

㉡ $p : a + b \leq 2, q : a \leq 1$ 또는 $b \leq 1$

㉢ $p : |a - b| = |a| - |b|, q : (a - b)b \geq 0$

① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉠, ㉡

⑤ ㉡, ㉢

해설

$p \rightarrow q$ 가 참이고 $q \rightarrow p$ 가 거짓인 것을 찾는다.

㉠ $a \geq b \rightarrow a^2 \geq b^2$ (거짓), 반례 : $a = -1, b = -2$
 $a^2 \geq b^2 \rightarrow a \geq b$ (거짓), 반례 : $a = -4, b = 3$

㉡ $a + b \leq 2 \rightarrow a \leq 1$ 또는 $b \leq 1$ (참), $a \leq 1$ 또는 $b \leq 1 \rightarrow$
 $a + b \leq 2$ (거짓), 반례 : $a = 0, b = 3$

㉢ $|a - b| = |a| - |b| \leftrightarrow (a - b)b \geq 0$

p, q 모두 $a \geq b, b \geq 0$ 또는 $a \leq b, b \leq 0$ 이므로 필요충분조건이다.

3. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, n\}$ 의 부분집합 중에서 원소 1, 3, 5를 반드시 포함하는 부분집합의 개수가 32 개일 때, 자연수 n 의 값은?

① 8

② 9

③ 10

④ 11

⑤ 12

해설

집합 A 의 원소의 개수가 n 개이므로 원소 1, 3, 5를 반드시 포함하는 부분집합의 개수는 2^{n-3} 개이다.

$$2^{n-3} = 32, 2^{n-3} = 2^5$$

$$n - 3 = 5 \text{ 이므로 } n = 8$$

4. 전체집합 $U = \{x|x\text{는 } 40\text{이하의 자연수}\}$, $n(A) = 12$, $n(B) = 14$, $n(A \cap B) = 5$ 일 때, $n((A \cup B)^c)$ 를 구한 것은? .

① 18

② 19

③ 20

④ 21

⑤ 22

해설

$$n(U) = 40, n(A) = 12, n(B) = 14$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 26 - 5 = 21$$

$$n((A \cup B)^c) = n(U) - n(A \cup B) = 40 - 21 = 19$$