1. 등식 $3x^2+5x=a(x-1)^2+b(x+1)+c$가 x에 관한 항등식이 되도록 하는 상수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $a+b-c$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 28

해설

우변을 전개하여 계수비교법으로 미정계수를 구한다.

$3x^2+5x=a(x-1)^2+b(x+1)+c$

$\qquad\qquad =ax^2+(-2a+b)x+a+b+c$

$a=3,\ -2a+b=5,\ a+b+c=0$

$\therefore\ a=3,\ b=11,\ c=-14$

$\therefore\ a+b-c=28$

해설

수치대입법으로 미정계수를 구해도 된다.

양변에 $x=0$을 대입하면

$0=a+b+c\cdots$ ㉠

양변에 $x=1$을 대입하면

$8=2b+c\cdots$ ㉡

양변에 $x=-1$을 대입하면

$-2=4a+c\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하면

$a=3,\ b=11,\ c=-14$

$\therefore\ a+b-c=28$

2. 다항식 $f(x)$를 $x-2$로 나눈 몫을 $Q(x)$라 할 때, 나머지는?

① $f(2)$ ② $f(-2)$ ③ $f(2)+Q(2)$
④ $Q(2)$ ⑤ $Q(-2)$

해설

$f(x)=(x-2)Q(x)+R$
$\therefore\ f(2)=R$

3. 다항식 $2x^3+x^2+x+1$를 $2x-1$ 로 나눈 몫과 나머지를 순서대로 나열한 것은?

① $x^2+x+1,\ 1$　　② $x^2+x+1,\ 2$

③ $2x^2+2x+2,\ 1$　　④ $2x^2+2x+2,\ 2$

⑤ $4x^2+4x+4,\ 4$

해설

다항식 $2x^3+x^2+x+1$를 $2x-1$ 로 나눈 몫과 나머지를 각각 $Q(x)$, R이라고 하면 $2x^3+x^2+x+1=(2x-1)Q(x)+R$

$$=\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot 2Q(x)+R$$

이므로

$$\begin{array}{c|cccc} \frac{1}{2} & 2 & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 2 & 2 & 2 & \boxed{2} \end{array}$$

$2Q(x)=2x^2+2x+2$

$\therefore\ Q(x)=x^2+x+1,\ R=2$

4. $x+y+(2x-y)i=1+5i$를 만족하는 두 실수 $x,\ y$에 대하여, $x+y$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$x+y=1,\ 2x-y=5$

$\therefore\ x=2,\ y=-1$

5. $x = 1 + \sqrt{2}i, y = 1 - \sqrt{2}i$ 일 때, $x^2 + y^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

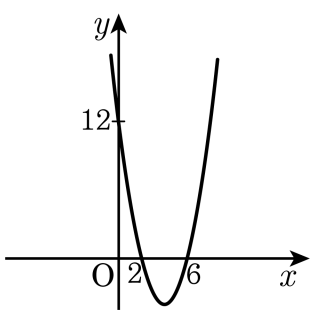
▷ 정답 : -2

해설

$x + y = 2,\ \ xy = 3$

$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 2^2 - 2 \times 3 = 4 - 6 = -2$

6. 다음은 이차함수 $y = (x-2)(x-6)$ 의 그래프이다.



이 이차함수가 x축과 만나는 두 점을 각각 A, B라 할 때, $\overline{AB}$의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

이차방정식 $(x-2)(x-6) = 0$ 에서 $x = 2$ 또는 $x = 6$
따라서 $A(2,\ 0)$, $B(6,\ 0)$ 이므로 $\overline{AB} = 4$

7. $a^2b + b^2c - b^3 - a^2c$을 인수분해하면?

① $(a+b)(a-b)(b+c)$
② $(a-b)(b-c)(c+a)$
③ $(a-b)(a+b)(b-c)$
④ $(a-b)(a+b)(c-a)$
⑤ $(a-b)(b+c)(c-a)$

해설

$a^2b + b^2c - b^3 - a^2c$
$= a^2(b-c) - b^2(b-c)$
$= (a-b)(a+b)(b-c)$

8. $x^4+4x^3-2x^2+ax+b$가 이차식의 완전제곱식이 될 때, 상수 a, b의 값은?

① $a=12,\ b=9$
② $a=-12,\ b=9$
③ $a=12,\ b=-9$
④ $a=-12,\ b=-9$
⑤ $a=9,\ b=12$

해설

$x^4+4x^3-2x^2+ax+b=(x^2+px+q)^2$으로 놓으면
이 식의 우변은
$x^4+2x^2(px+q)+(px+q)^2$
$=x^4+2px^3+(p^2+2q)x^2+2pqx+q^2$
좌변과 계수를 비교하면
$2p=4,\ p^2+2q=-2$
$p=2,\ q=-3$에서
$a=2pq=-12,\ b=q^2=9$

9. 방정식 $|x-1|=2$의 해를 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : -1

해설

ⅰ) $x \geq 1$일 때
$|x-1| = x-1$이므로, $x-1=2$
$\therefore x=3$
ⅱ) $x<1$일 때
$|x-1| = -x+1$이므로, $-x+1=2$
$\therefore x=-1$
따라서 (ⅰ), (ⅱ)에서 $x=3$ 또는 $x=-1$

10. 이차방정식 $x^2+2x+k-3=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 정수 k의 최대값은?

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

서로 다른 두 실근을 갖으려면 판별식이 0보다 커야 한다.

$D' = 1^2-(k-3)>0$

$\therefore\ k<4$

$\therefore$ 최댓값은 3 ($\because$ k는 정수)

11. x에 대한 이차식 $2x^2 + (k+1)x + k - 1$이 완전제곱식이 될 때, k의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$2x^2 + (k+1)x + k - 1$이 완전제곱식이므로

$D = (k+1)^2 - 8(k-1) = 0$

$(k-3)^2 = 0$

$\therefore\ k = 3$

12. 이차방정식 $x^2+3x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2$ 의 값은?

① -5　② -4　③ -1　④ 1　⑤ 4

해설

근과 계수와의 관계를 이용하면,

$\alpha+\beta=-3 \quad \alpha\beta=1$

$\therefore (\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}$

$=-3+2=-1$

13. 방정식 $x^3 - x = 0$의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = -1$

▷ 정답 : $x = 0$

▷ 정답 : $x = 1$

해설

좌변을 인수분해 하면

$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1)$

$\therefore\ x = -1, 0, 1$

14. 사차방정식 $x^4 - 11x^2 + 30 = 0$의 네 근 중 가장 작은 근을 a, 가장 큰 근을 b라 할 때, $a^2 + b^2$의 값은?

① 8　　② 9　　③ 10　　④ 11　　⑤ 12

해설

$x^4 - 11x^2 + 30 = 0$

$(x^2 - 5)(x^2 - 6) = 0$

$\therefore\ x = \pm\sqrt{5},\ x = \pm\sqrt{6}$

가장 작은 근 $a = -\sqrt{6}$, 가장 큰 근 $b = \sqrt{6}$

$\therefore\ a^2 + b^2 = 6 + 6 = 12$

15. 연립방정식 $\begin{cases} y = x + 1 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ 의 해를

$x = \alpha$,$y = \beta$라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta$의 값은?

① 1　　② 3　　③ 5　　④ 7　　⑤ 9

해설

$\begin{cases} y = x + 1 & \cdots ㉠ \\ x^2 + y^2 = 5 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 ㉡에 대입하면

$x^2 + (x+1)^2 = 5$, $2x^2 + 2x - 4 = 0$,

$2(x+2)(x-1) = 0$

$\therefore\ x = 1,\ -2$

$x = 1$일 때, $y = 2$,

$x = -2$일 때, $y = -1$

$\therefore\ \alpha = 1, \beta = 2$ 또는 $\alpha = -2,\ \beta = -1$

$\therefore\ \alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta = 3$

16. $x+y+z=1$, $xy+yz+zx=2$, $xyz=3$ 일 때, $(x+y)(y+z)(z+x)$ 의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x+y+z=1$에서
$x+y=1-z$
$y+z=1-x$
$z+x=1-y$
$(x+y)(y+z)(z+x)=(1-z)(1-x)(1-y)$
$=1-(x+y+z)+(xy+yz+zx)-xyz$
$=1-1+2-3=-1$

17. 방정식 $a(ax-1)=2(ax-1)$ 에 대한 설명으로 옳은 것은?

① $a=0$ 일 때, 부정
② $a=2$ 일 때, 불능
③ $a \neq 2$ 일 때, $x=\frac{1}{a}$
④ $a \neq 0$ 일 때, 해는 없다.
⑤ $a \neq 0,\ a \neq 2$ 일 때, $x=\frac{1}{a}$

해설

$a(ax-1)=2(ax-1), a^2x-2ax=a-2$ 에서
$a(a-2)x=a-2$
i) $a \neq 0,\ a \neq 2$ 일 때, $x=\frac{1}{a}$
ii) $a=2$ 일 때, $0 \cdot x=0$ 이므로 해는 무수히 많다. (부정)
iii) $a=0$ 일 때, $0 \cdot x=-2$ 이므로 해가 없다. (불능)
따라서 옳은 것은 ⑤뿐이다.

18. 직선 $y = x + 4$에 평행하고, 곡선 $y = -x^2 + 2$에 접하는 직선의 방정식은?

① $4x + 4y = 9$　② $4x - 4y = 9$　③ $-4x + 4y = 9$
④ $-4x - 4y = 5$　⑤ $-4x - 4y = -5$

해설

직선 $y = x + 4$에 평행한 직선의 방정식을 $y = x + k$라 하면
이차방정식 $x + k = -x^2 + 2$,
즉 $x^2 + x + k - 2 = 0$의 판별식을 D라 할 때,
$D = 1 - 4k + 8 = 0$
$\therefore k = \frac{9}{4}$
따라서, 구하는 직선의 방정식은 $y = x + \frac{9}{4}$
$\therefore -4x + 4y = 9$

19. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - xy - 2 = 0 \\ y^2 - xy - 1 = 0 \end{cases}$ 의 해를

$x = \alpha,\ y = \beta$라 할 때, $\alpha^2 - \beta^2$의 값을 구하면?

① -1　　② 0　　③ $\frac{1}{3}$　　④ $\frac{5}{3}$　　⑤ 1

해설

$\begin{cases} x^2 - xy - 2 = 0 & \cdots ① \\ y^2 - xy - 1 = 0 & \cdots ② \end{cases}$

상수항을 소거하기 위해 ① − ② × 2를 계산하여 정리하면

$x^2 + xy - 2y^2 = 0,\ (x + 2y)(x - y) = 0$

$\therefore\ x = y,\ x = -2y$ 각각을 ① 식에 대입하면

i) $x = y$일 때 $x^2 - x^2 - 2 = 0,\ -2 = 0$ 불능

ii) $x = -2y$일 때 $4y^2 + 2y^2 - 2 = 0$ $\begin{cases} y^2 = \frac{1}{3} \\ x^2 = \frac{4}{3} \end{cases}$

$x = \alpha,\ y = \beta$라 할 때, $\alpha^2 - \beta^2 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1$

20. 다음 두 방정식이 공통근 α를 갖는다. 이 때, $m+\alpha$의 값을 구하여라.

$$x^2+(m+2)x-4=0\ ,\ x^2+(m+4)x-6=0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

두 방정식의 공통근이 α이므로

$\alpha^2+(m+2)\alpha-4=0\cdots$ ㉠

$\alpha^2+(m+4)\alpha-6=0\cdots$ ㉡

㉠ − ㉡ 에서 $-2\alpha+2=0\ \therefore\ \alpha=1$

$\alpha=1$을 ㉠에 대입하면 $1+m+2-4=0$

$\therefore\ m=1$

$\therefore\ m+\alpha=2$