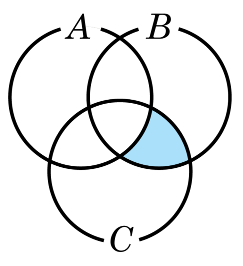
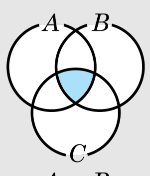
1. 다음 벤다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합은?

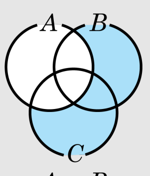


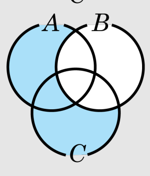
① $A \cap B \cap C$ ② $(B \cup C) - A$ ③ $(A \cup C) - B$

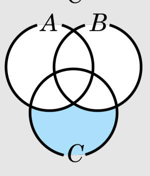
④ $C - (A \cup B)$ ⑤ $(B \cap C) - A$

해설

① 

② 

③ 

④ 

2. $a > 0$ 일 때, $A = 1 + \frac{a}{2}$, $B = \sqrt{1+a}$ 의 대소를 바르게 비교한 것은?

① $A > B$ ② $A < B$ ③ $A \geq B$
④ $A \leq B$ ⑤ $A = B$

해설

$a > 0$ 이므로 $1 + \frac{a}{2} > 0$, $\sqrt{1+a} > 0$
제곱을 하여 비교하면

$$\begin{aligned} A^2 - B^2 &= \left(1 + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{1+a}\right)^2 \\ &= 1 + a + \frac{a^2}{4} - 1 - a \\ &= \frac{a^2}{4} > 0 \end{aligned}$$

따라서 $A^2 > b^2$ 이므로 $A > B$ 이다.

3. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 일대일대응인 세 함수 f, g, h 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은 무엇인가? (단, I 는 항등함수)

보기

㉠ $f \circ g = g \circ f$

㉡ $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

㉢ $(f \circ g \circ h)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \circ h^{-1}$

㉣ $f \circ g = I$ 이면 $g = f^{-1}$ 이다.

① ㉠, ㉡　　② ㉡, ㉣　　③ ㉢, ㉣
④ ㉠, ㉡, ㉣　　⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠ 일반적으로 함수의 합성에서
교환법칙은 성립하지 않는다.
∴ 옳지 않다.

㉡ 함수의합성에서 결합법칙은 성립한다.
∴ 옳다.

㉢ $(f \circ g \circ h)^{-1}$
$= ((f \circ g) \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ (f \circ g)^{-1}$
$= h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1}$
∴ 옳지 않다.

㉣ $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$ 이므로
$f \circ g = I$ 에서$f^{-1} \circ f \circ g = f^{-1} \circ I = f^{-1}$
∴ $g = f^{-1}$ ∴ 옳다.

4. 전체집합 U 의 부분집합 A, B 에 대하여 다음 등식이 성립할 때, 빈칸에 알맞은 것은?

$$(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = (A^c \cap B) \cup (\qquad\quad)$$

① $A \cap B$　　② $A \cap B^c$　　③ $(A \cap B)^c$

④ $A^c \cup B$　　⑤ $A \cup B^c$

해설

$(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = (A^c \cap B) \cup (\qquad\quad)$ 에서
$(A \cup B) \cap (A \cap B)^c = (A \cup B) - (A \cap B)$ 이고,
$(A^c \cap B) \cup (\qquad\quad) = (B - A) \cup (\qquad\quad)$ 이므로,
빈칸에는 $A - B$ 에 해당하는 식인 $A \cap B^c$ 이 들어와야 한다.

5. 다음 중 명제 「$x + y \geq 2$ 이고 $xy \geq 1$ 이면, $x \geq 1$ 이고 $y \geq 1$ 이다.」가 거짓임을 보이는 반례는?

① $x = 1,\ y = \frac{1}{2}$　　② $x = 100,\ y = \frac{1}{2}$

③ $x = 1,\ y = 1$　　④ $x = 2,\ y = 4$

⑤ $x = -1,\ y = -5$

해설

가정을 만족시키면서 결론을 만족시키지 않는 것을 고르면 된다.
따라서 ②가 올바른 반례이다

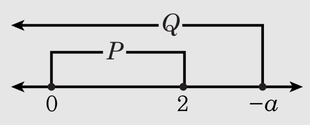
6. 실수 x에 대한 두 조건 $p\ :\ 0 \le x \le 2$, $q\ :\ x + a \le 0$이 있다. 명제 $p\ \rightarrow\ q$가 참일 때, a의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$p,\ q$를 만족하는 집합을 각각 $P,\ Q$라 하면 $p\ \rightarrow\ q$가 참이므로 $P \subset Q$ 이다. $P = \{x|0 \le x \le 2\},\ Q = \{x|x \le -a\}$



위의 그림에서 $P \subset Q$이려면 $2 \le -a,\ a \le -2$ 따라서 a의 최댓값은 -2

7. 다음 보기의 명제 중 '역'과 '대우'가 모두 참인 명제를 모두 고르면?

㉠ 자연수 n 에 대하여 n^2 이 홀수이면 n 도 홀수이다.

㉡ 실수 x, y 에 대하여 $x + y > 2$ 이면 $x > 1$ 또는 $y > 1$ 이다.

㉢ $\triangle ABC$ 에서 $\angle A = \angle B$ 이면 $\triangle ABC$ 는 이등변삼각형이다.

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ n^2 이 홀수이면 n 도 홀수이고, n 이 홀수이 면 n^2 도 홀수이므로 명제와 그 역이 모두 참 이다. 따라서 역과 대우 모두 참이다.
㉡ 역 '$x > 1$ 또는 $y > 1$ 이면 $x+y > 2$ ' 에 서 $x = 2$, $y = -3$ 일 때 $2-3 < 2$ 이므로 거짓 이다. 대우 '$x \leq 1$ 이고 $y \leq 1$ 이면 $x+y \leq 2$ '는 참이다.
㉢ 역 '$\triangle ABC$ 가 이등변삼각형이면 $\angle A = \angle B$ '는 $\angle A = \angle C$ 또는 $\angle B = \angle C$ 일 때도 $\triangle ABC$ 는 이등변삼각형이므로 거짓이다. 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.
따라서 역과 대우가 모두 참인 것은 ㉠뿐이다.

8. 두 조건 $p : x^2 - ax - 6 > 0$, $q : x^2 + 2x - 3 \neq 0$에 대하여 $p \rightarrow q$가 참일 때 a의 최댓값, 최솟값의 합은?

① -7 ② -6 ③ -5 ④ -4 ⑤ -3

해설

$p \rightarrow q$는 $\sim q \rightarrow \sim p$와 동치임을 이용

$\therefore x^2 + 2x - 3 = 0$이면 $x^2 - ax - 6 \leq 0$이다.

$x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1) = 0$,

$x = -3,\ 1$이면 $x^2 - ax - 6 \leq 0$이다.

1) $x = -3\ : 9 + 3a - 6 \leq 0 \ \rightarrow\ a \leq -1$

2) $x = 1\ : 1 - a - 6 \leq 0 \ \rightarrow\ a \geq -5$

$\therefore\ -5 \leq a \leq -1$

따라서, $-5 + (-1) = -6$

9. $a>0$, $b>0$, $c>0$일 때, $\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

산술-기하평균 부등식에 의해

$\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\geq 3\sqrt[3]{\frac{b}{a}\times\frac{c}{b}\times\frac{a}{c}}=3$

$\therefore\ \frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\geq 3$

10. 자연수 a, k 에 대하여 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3,\ k\}$ 에서 집합 $Y = \{4,\ 7,\ a^4,\ a^2+3a\}$ 로의 함수 $f(x) = 3x+1$ 이 일대일 대응일 때, $a+k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

함수 f 가 일대일 대응이고, $f(x) = 3x+1$ 에서 $f(1) = 4$, $f(2) = 7$ 이므로

$f(3) = a^4$ 또는 $f(3) = a^2 + 3a$ 이어야 한다.

만약 $f(3) = a^4$ 이면 $a^4 = 3 \times 3 + 1 \quad \therefore a^4 = 10$

그런데 $a^4 = 10$ 을 만족하는

자연수 a 가 존재하지 않으므로 모순이다.

$\therefore f(3) = a^2 + 3a,\ f(k) = a^4$

$f(3) = a^2 + 3a$ 에서 $a^2 + 3a = 10$

$a^2 + 3a - 10 = 0, \quad (a-2)(a+5) = 0$

$\therefore a = 2(\because a$는 자연수)

$f(k) = a^4$, 즉 $a^4 = 3k+1$ 에서 $3k+1 = 16$

$\therefore k = 5$

$\therefore a + k = 2 + 5 = 7$

11. 두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$, $Y=\{5,\ 6,\ 7\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수의 개수를 a , 일대일 대응의 개수를 b 라고 할 때, $a+b$ 의 값은?

① 27 ② 30 ③ 33 ④ 36 ⑤ 39

해설

집합 X 에서 Y 로의 함수의 개수는
$a=3\times3\times3=27$
집합 X 에서 Y 로의 일대일 대응의 개수는
$b=3\times2\times1=6$
$\therefore a+b=27+6=33$

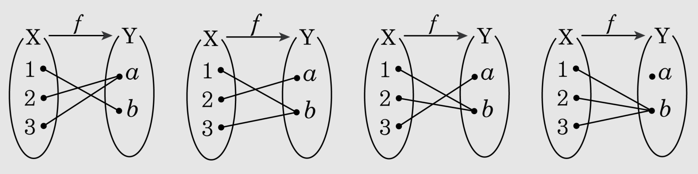
12. 두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$, $Y=\{a,\ b\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 f 중 $f(1)=b$ 인 것의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ＿＿＿＿＿ 개

▷ 정답 : 4 개

해설

$f(1)=b$ 인 함수 f 는 다음과 같다
따라서, 구하는 함수 f 는 4 개이다.



13. 두 함수 $f(x)=3x-1,\ g(x)=4-3x$ 에 대하여 $h \circ f = g$ 를 만족하는 일차함수 $h(x)$ 는?

① $h(x)=\dfrac{1}{3}(x+1)$
② $h(x)=3x-1$
③ $h(x)=x-3$
④ $h(x)=3-x$
⑤ $h(x)=x+3$

해설

$(h \circ f)(x)=4-3x$ 에서

$f(x)=t$ 라 하면 $t=3x-1,\ 3x=t+1$

$x=\dfrac{1}{3}(t+1)$ 을 대입하면

$h(t)=4-3\times\dfrac{1}{3}(t+1)=3-t$

$\therefore\ h(x)=3-x$

14. 두 집합 $X = \{x \mid 0 \le x \le 2\}$, $Y = \{y \mid a \le y \le b\}$ 에서 $f : X \to Y$, $f(x) = 3x - 1$ 의 역함수 $f^{-1} : Y \to X$ 가 존재할 때, 실수 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

함수 $f(x)$ 는 역함수가 존재하므로 일대일 대응이다. 따라서 함수 $f(x)$ 는 점 $(0,\ a)$, $(2,\ b)$를 지나야 한다.

$a = f(0) = -1$, $b = f(2) = 5$

$\therefore\ a + b = 4$

15. $f : R \to R$, $f(x) = x|x| + a$ 에서 $f^{-1}(2) = -1$ 일 때, $(f^{-1} \cdot f^{-1})(2)$ 의 값은?(단, f^{-1} 는 f 의 역함수)

① -3　　② -2　　③ -1　　④ 0　　⑤ 1

해설

$f^{-1}(2) = -1$ 에서 $f(-1) = 2$ 이므로

$-1 + a = 2$

$\therefore\ a = 3$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & (x \geq 0) \\ -x^2 + 3 & (x < 0) \end{cases}$$

$(f^{-1} \cdot f^{-1})(2) = f^{-1}(-1) = k$ 라 하면

$f(k) = -1$ 이므로 $k < 0$

즉 $-k^2 + 3 = -1$

$\therefore\ k^2 = 4$

$\therefore\ k = -2$

16. 분수식 $\dfrac{x^2}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{y^2}{(y-x)(y-z)}+\dfrac{z^2}{(z-x)(z-y)}$를 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$\dfrac{x^2(z-y)+y^2(z-x)+z^2(y-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)}\cdots$①

①에서 분자를 x에 관하여 정리하면

$x^2(z-y)+y^2(z-x)+z^2(y-x)$

$=(z-y)x^2-(z^2-y^2)x+yz^2-y^2z$

$=(z-y)x^2-(z+y)(z-y)x+zy(z-y)$

$=(z-y)\left\{x^2-(z+y)x+zy\right\}$

$=(z-y)(x-z)(x-y)=(x-y)(y-z)(z-x)$

$\therefore$ (준식) $=\dfrac{(x-y)(y-z)(z-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)}=1$

17. 등식 $\frac{3x}{x^3+1}=\frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{x^2-x+1}$ 가 x에 관한 항등식일 때, $a+b+c$의 값은?

① -2 ② -6 ③ 1 ④ 2 ⑤ $\frac{7}{4}$

해설

$\frac{3x}{x^3+1}=\frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{x^2-x+1}$

$=\frac{a(x^2-x+1)+(x+1)(bx+c)}{x^3+1}$

$=\frac{ax^2-ax+a+bx^2+bx+cx+c}{x^3+1}$

$=\frac{(a+b)x^2+(b-a+c)x+a+c}{x^3+1}$

$a+b=0,\ b-a+c=3,\ a+c=0$을 연립하여 풀면

$a=-1,\ b=1,\ c=1$

$\therefore\ a+b+c=1$

18. 작년에 3 만원 하던 야구 배트와 2 만원 하던 글러브가 올해는 각각 10 %, 15 % 가 인상되었다. 야구 배트와 글러브를 한 세트로 볼 때, 한 세트의 인상률은?

① 11.5 % ② 12 % ③ 12.5 %
④ 13 % ⑤ 13.5 %

해설

작년의 한 세트의 가격 : $30000 + 20000 = 50000$ (원)

금년의 야구 배트의 가격 : $30000 \times \left(1 + \frac{10}{100}\right) = 33000$ (원)

금년의 글러브의 가격 : $20000 \times \left(1 + \frac{15}{100}\right) = 23000$ (원)

금년의 한 세트의 가격 : $33000 + 23000 = 56000$ (원)
따라서 한 세트의 가격은 $56000 - 50000 = 6000$ (원) 인상되었으므로,

인상률은 $\frac{6000}{50000} \times 100 = 12$(%) 이다.

19. 함수 $y = \dfrac{bx+c}{x+a}$ 의 그래프가 점 $(1, 2)$ 를 지나고 $x = 3,\ y = 1$ 을 점근선으로 할 때, 상수 a, b, c 에 대해서 $a-b-c$ 의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

점근선이 $x = 3,\ y = 1$ 이므로
$a = -3,\ b = 1$ 이다.
그리고 점 $(1, 2)$ 를 지나므로,
$2 = \dfrac{1+c}{1-3},\ c = -5$
$\therefore\ a-b-c = 1$

20. 분수함수 $y=\dfrac{x-1}{x-2}$ 의 그래프가 직선 $y=-x+a$에 대하여 대칭일 때, 상수 a의 값을 구하면?

① -1　　② 0　　③ 1　　④ 2　　⑤ 3

해설

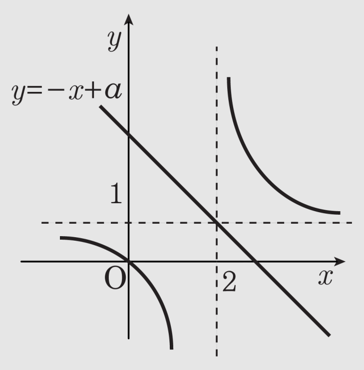
$y=\dfrac{x-1}{x-2}=\dfrac{(x-2)+1}{x-2}=\dfrac{1}{x-2}+1$

즉, 점근선이 $x=2$, $y=1$ 인 분수함수이므로 그래프는 다음 그림과 같다.

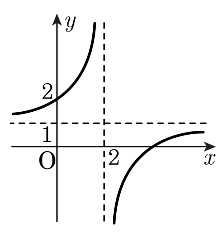
이 그래프가 직선 $y=-x+a$ 에 대하여 대칭이 되려면 직선 $y=-x+a$ 가 두 점근선의 교점인 $(2,\ 1)$ 을 지나야 하므로

$1=-2+a$

$\therefore\ a=3$



21. 함수 $y = \dfrac{a}{x-p} + q$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때 $a+p+q$의 값은?



① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

$y = \dfrac{a}{x-2} + 1$ 에서 $f(0) = 2$ 이므로 $2 = \dfrac{a}{-2} + 1$

$\therefore\ a = -2$

$\therefore\ a + p + q = -2 + 2 + 1 = 1$

22. 분수함수 $f(x) = \dfrac{x+3}{2x-1}$ 에 대하여 합성함수 $y = (f \circ f \circ f)(x)$ 의 그래프는 점 $(a,\ b)$ 에 대하여 대칭이다. 이 때, $a+b$ 의 값을 구하면?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

분수함수 $f(x) = \dfrac{x+3}{2x-1}$ 에서

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{\dfrac{x+3}{2x-1} + 3}{2 \cdot \dfrac{x+3}{2x-1} - 1}$$

$$= \frac{x+3+3(2x-1)}{2(x+3)-(2x-1)} = x \text{ 이므로}$$

$y = (f \circ f \circ f)(x) = f((f \circ f)(x)) = f(x)$

따라서, $y = f(x)$ 의 점근선은

$x = \dfrac{1}{2},\ y = \dfrac{1}{2}$ 이고, 그 그래프는 점근선의

교점 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ 에 대하여 대칭이므로

$a = \dfrac{1}{2},\ b = \dfrac{1}{2}$

$\therefore\ a + b = 1$

23. $x-y<0$, $xy<0$일 때, $\sqrt{x^2-2xy+y^2}+\sqrt{x^2}-|y|$를 간단히 하면?

① $2x$　　② $2y$　　③ $-2x$
④ $-2y$　　⑤ $2x-2y$

해설

$x-y<0,\ xy<0 \Rightarrow x<0,\ y>0$
$\sqrt{x^2-2xy+y^2}+\sqrt{x^2}-|y|$
$=\sqrt{(x-y)^2}+|x|-|y|$
$=|x-y|+|x|-|y|$
$=-(x-y)-x-y=-2x$

24. 유리수 x, y가 $(x-2\sqrt{2})(2\sqrt{2}-y)=4\sqrt{2}$를 만족시킬 때 x^3+y^3의 값은?

① 45　　② 56　　③ 48　　④ 37　　⑤ 26

해설

$2\sqrt{2}x-xy-8+2\sqrt{2}y=4\sqrt{2}$

$-xy-8+(2x+2y-4)\sqrt{2}=0$

$xy=-8,\ x+y=2$

$$\begin{aligned}\therefore x^3+y^3 &= (x+y)^3-3xy(x+y)\\ &= 2^3-3\cdot(-8)\cdot 2=56\end{aligned}$$

25. $x > 2$에서 정의된 두 함수 $f(x),\ g(x)$가 $f(x) = \sqrt{x-2}+2,\ g(x) = \dfrac{1}{x-2}+2$일 때 $(f \cdot g)(3) + (g \cdot f)(3)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$(f \cdot g)(3) = f(g(3)) = f(3) = 3$
$(g \cdot f)(3) = g(f(3)) = g(3) = 3$
$\therefore (f \cdot g)(3) + (g \cdot f)(3) = 6$

26. 두 집합 X, Y 에 대하여 기호 $\otimes$ 를 $X \otimes Y = \left\{x \times y | x \in X \text{ 그리고 } y \in Y\right\}$ 라고 약속한다.
$A = \{0,\ 1,\ 2\}$, $B = \{1,\ 2\}$ 일 때, $A \otimes B$ 를 구하면?

① $\{0,\ 1,\ 2,\ 4\}$　② $\{0,\ 1,\ 2\}$　③ $\{0,\ 1\}$
④ $\{0\}$　⑤ $\{1, 2\}$

해설

$A \otimes B$
$= \{0 \times 1,\ 0 \times 2,\ 1 \times 1, 1 \times 2,\ 2 \times 1,\ 2 \times 2\}$
$= \{0,\ 1,\ 2,\ 4\}$

27. 세 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3, \cdots,\ 7\}$, $B = \{x \mid x$는 9보다 작은 홀수$\}$, $C = \{x \mid x = 2 \times n + 1, n = 0,\ 1\}$ 에 대하여 A, B, C 사이의 포함 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $C \subset A \subset B$　② $A \subset B \subset C$　③ $B \subset A \subset C$
④ $C \subset B \subset A$　⑤ $A \subset C \subset B$

해설

$B = \{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$, $C = \{1,\ 3\}$
따라서 $C \subset B \subset A$ 의 포함 관계가 성립한다.

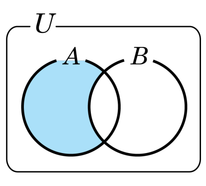
28. 두 집합 A, B 에 대하여 $A = \{x \mid x \geq 1\}$, $B = \{x \mid x^2 - 2ax + 2a \leq 0\}$ 일 때, $B \subset A$ 가 되도록 하는 실수 a 의 범위는?

① $a > 0$ ② $a \geq 0$ ③ $a > 1$ ④ $a > 2$ ⑤ $a \geq 2$

해설

(i) $B = \phi$ 일 때,
당연히 $B \subset A$ 이므로
$B = \{x \mid x^2 - 2ax + 2a \leq 0\} = \phi$ 에서
이차방정식 $x^2 - 2ax + 2a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $\frac{D}{4} =$
$a^2 - 2a < 0$
$\therefore\ 0 < a < 2$
(ii) $B \neq \phi$ 일 때,
이차방정식 $x^2 - 2ax + 2a = 0$ 의 두 근을
$\alpha, \beta\ (\alpha \leq \beta)$ 라 하면
$x^2 - 2ax + 2a \leq 0 \Leftrightarrow (x - \alpha)(x - \beta) \leq 0$
이 때, $B = \{x \mid \alpha \leq x \leq \beta\} \subset \{x \mid x \geq 1\} = A$ 이므로 $\alpha \geq 1$ 이고
$\beta \geq 1$ 이어야 한다.
따라서, $f(x) = x^2 - 2ax + 2a$ 라 하면
㉠ $\frac{D}{4} = a^2 - 2a \geq 0$ 에서
$a \leq 0$ 또는 $a \geq 2$
㉡ $f(1) \geq 0$ 에서 $1 > 0$ 이므로
a 는 모든 실수
㉢ (대칭축) ≥ 1 에서 $a \geq 1$
㉠, ㉡, ㉢의 공통범위는 $a \geq 2$
(i), (ii) 에서 $a > 0$

29. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 다음 그림과 같이 벤 다이어그램을 그린 후 원소를 써 넣어 보았더니 색칠한 부분에는 원소가 하나도 없었다. 다음 중 항상 옳은 것은?

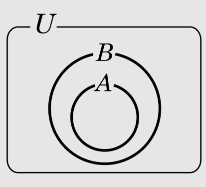


① $B \subset A$ ② $n(A) < n(B)$ ③ $A \cup B = B$

④ $B - A = \varnothing$ ⑤ $A^c \subset B^c$

해설

주어진 벤 다이어그램에서 색칠한 부분이 공집합이므로 집합 A 는 집합 B 에 포함된다. 따라서 $A \cup B = B$ 가 항상 성립한다.



30. 다음 중 p가 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것을 모두 고르면? (단, a, b, c 는 실수이다.)

㉠ p : $|a|+|b|=0$ q : $ab=0$

㉡ p : $(a-b)(b-c)=0$ q : $(a-b)^2+(b-c)^2=0$

㉢ $p : 0<x<y$ $q : x^2<y^2$

㉣ $p : x<y$ $q : [x]<[y]$ (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수)

① ㉠, ㉡　② ㉡, ㉢　③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉣　⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠ p : $|a|+|b|=0 \Leftrightarrow a=0$이고 $b=0$ q : $ab=0 \Leftrightarrow a=0$ 또는 $b=0$ $\therefore p \Rightarrow q$ 이고 $p \not\Leftarrow q$ 이므로 만족
㉡ p : $(a-b)(b-c)=0$ $a=b$ 또는 $b=c$ q : $a=b$ 그리고 $b=c$ $\therefore p \not\Rightarrow q$이고 $p \Leftarrow q$ 이므로 필요조건만 만족한다.
㉢ $p \Rightarrow q$ ($\because x, y$ 모두 양수) $p \not\Leftarrow q$ ($\because x, y$ 모두 음수이거나 서로 부호가 다를 때 참이 아닐 수 있다.) $\therefore$ 만족
㉣ $p \not\Rightarrow q$ ($\because x=1, y=1.5$ 일 때 $[1]=[1.5]=1$일 수 있다.) $p \Leftarrow q$ 이므로 필요조건만 만족

31. 집합 $M=\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \cdots, \frac{1}{2^{10}}\right\}$ 의 공집합이 아닌 모든 부분집합을 $S_1, S_2, \cdots, S_N\ (N=2^{10}-1)$ 이라고 하자. 집합 $S_1, S_2, \cdots, S_N$ 의 최소 원소들의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

최소 원소가 $\frac{1}{2}$ 인 부분집합의 개수 $\rightarrow$ 1

최소 원소가 $\frac{1}{2^2}$ 인 부분집합의 개수 $\rightarrow$ 2^1

$\vdots$

최소 원소가 $\frac{1}{2^{10}}$ 인 부분집합의 개수 $\rightarrow$ 2^9

$\therefore\ \frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{2^2}\times 2^1+\ \cdots\ +\frac{1}{2^{10}}\times 2^9=5$

32. 1 부터 어떤 수까지의 자연수 중 k 의 배수를 원소로 하는 집합을 $P_{(k)}$ 라고 정의한다. $n(P_{(3)}) = a$, $n(P_{(4)}) = b$, $n(P_{(12)}) = c$ 라고 할 때, $n((P_{(3)} \cup P_{(6)}) \cup (P_{(2)} \cap P_{(4)}))$ 를 a, b, c 로 나타내어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b - c$

해설

$n(P_{(3)}) = a\ n(P_{(4)}) = b$, $n(P_{(12)}) = c$ 라고 할 때

$$\begin{aligned} & n((P_{(3)} \cup P_{(6)}) \cup (P_{(2)} \cap P_{(4)})) \\ &= n(P_3 \cup P_4) \\ &= n(P_{3)} + n(P_4) - n(P_{12}) \\ &= a + b - c \end{aligned}$$

33. 자연수 n에 대하여 $\sqrt{10+\sqrt{n}}+\sqrt{10-\sqrt{n}}$이 자연수 k가 될 때, $n+k$의 값을 구하면?

① 12　　② 22　　③ 32　　④ 42　　⑤ 52

해설

$\sqrt{10+\sqrt{n}}+\sqrt{10-\sqrt{n}}=k$ (n, k는 자연수)

양변을 제곱하면

$10+\sqrt{n}+2\sqrt{100-n}+10-\sqrt{n}=k^2$

$\therefore k^2-20=2\sqrt{100-n} \cdots$ (ⅰ)

이때, $0 \le k^2-20 < 20$ ($\because\ 0 \le \sqrt{100-n} < 10$) 이고, k^2-20은 짝수이므로 k^2도 짝수이다.

$20 \le k^2 < 40$을 만족하는 짝수의 제곱수는

36이므로　$k^2=36$

$\therefore k=6$

(ⅰ)에서 $n=36$

$\therefore\ n+k=42$