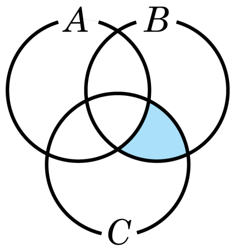
1. 다음 벤다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합은?

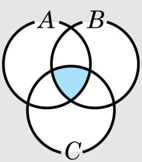


① $A \cap B \cap C$　② $(B \cup C) - A$　③ $(A \cup C) - B$

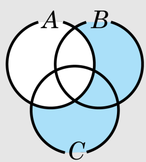
④ $C - (A \cup B)$　⑤ $(B \cap C) - A$

해설

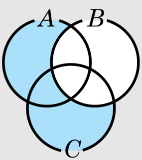
①



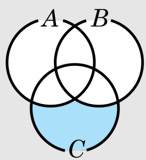
②



③



④



2. $a > 0$ 일 때, $A = 1+\dfrac{a}{2}$, $B = \sqrt{1+a}$ 의 대소를 바르게 비교한 것은?

① $A > B$ ② $A < B$ ③ $A \geq B$

④ $A \leq B$ ⑤ $A = B$

해설

$a > 0$ 이므로 $1 + \dfrac{a}{2} > 0$, $\sqrt{1+a} > 0$

제곱을 하여 비교하면

$$\begin{aligned} A^2 - B^2 &= \left(1 + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{1+a}\right)^2 \\ &= 1 + a + \frac{a^2}{4} - 1 - a \\ &= \frac{a^2}{4} > 0 \end{aligned}$$

따라서 $A^2 > b^2$ 이므로 $A > B$ 이다.

3. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 일대일대응인 세 함수 f, g, h 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은 무엇인가? (단, I 는 항등함수)

보기

㉠ $f \circ g = g \circ f$

㉡ $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

㉢ $(f \circ g \circ h)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \circ h^{-1}$

㉣ $f \circ g = I$ 이면 $g = f^{-1}$ 이다.

① ㉠, ㉡ ② ㉡, ㉣ ③ ㉢, ㉣

④ ㉠, ㉡, ㉣ ⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠ 일반적으로 함수의 합성에서
교환법칙은 성립하지 않는다.
$\therefore$ 옳지 않다.

㉡ 함수의합성에서 결합법칙은 성립한다.
$\therefore$ 옳다.

㉢ $(f \circ g \circ h)^{-1}$
$= ((f \circ g) \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ (f \circ g)^{-1}$
$= h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1}$
$\therefore$ 옳지 않다.

㉣ $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$ 이므로
$f \circ g = I$ 에서$f^{-1} \circ f \circ g = f^{-1} \circ I = f^{-1}$
$\therefore\ g = f^{-1}$ $\therefore$ 옳다.

4. 전체집합 U 의 부분집합 A, B 에 대하여 다음 등식이 성립할 때, 빈칸에 알맞은 것은?

$$(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = (A^c \cap B) \cup (\qquad\qquad)$$

① $A \cap B$ ② $A \cap B^c$ ③ $(A \cap B)^c$

④ $A^c \cup B$ ⑤ $A \cup B^c$

해설

$(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = (A^c \cap B) \cup (\qquad\qquad)$ 에서

$(A \cup B) \cap (A \cap B)^c = (A \cup B) - (A \cap B)$ 이고,

$(A^c \cap B) \cup (\qquad\qquad) = (B - A) \cup (\qquad\qquad)$ 이므로,

빈칸에는 $A - B$ 에 해당하는 식인 $A \cap B^c$ 이 들어와야 한다.

5. 다음 중 명제「$x+y \geq 2$ 이고 $xy \geq 1$ 이면, $x \geq 1$ 이고 $y \geq 1$ 이다.」가 거짓임을 보이는 반례는?

① $x=1,\ y=\frac{1}{2}$

② $x=100,\ y=\frac{1}{2}$

③ $x=1,\ y=1$

④ $x=2,\ y=4$

⑤ $x=-1,\ y=-5$

해설

가정을 만족시키면서 결론을 만족시키지 않는 것을 고르면 된다.
따라서 ②가 올바른 반례이다

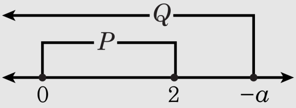
6. 실수 x에 대한 두 조건 p : $0 \le x \le 2$, q : $x+a \le 0$이 있다. 명제 $p \rightarrow q$가 참일 때, a의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

p, q를 만족하는 집합을 각각 P, Q라 하면 $p \rightarrow q$가 참이므로 $P \subset Q$ 이다. $P = \{x | 0 \le x \le 2\}$, $Q = \{x | x \le -a\}$



위의 그림에서 $P \subset Q$이려면 $2 \le -a$, $a \le -2$ 따라서 a의 최댓값은 -2

7. 다음 보기의 명제 중 '역'과 '대우'가 모두 참인 명제를 모두 고르면?

> ㉠ 자연수 n 에 대하여 n^2 이 홀수이면 n 도 홀수이다.
>
> ㉡ 실수 x, y 에 대하여 $x+y>2$ 이면 $x>1$ 또는 $y>1$ 이다.
>
> ㉢ $\triangle ABC$ 에서 $\angle A=\angle B$ 이면 $\triangle ABC$ 는 이등변삼각형이다.

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ n^2 이 홀수이면 n 도 홀수이고, n 이 홀수이 면 n^2 도 홀수이므로 명제와 그 역이 모두 참 이다. 따라서 역과 대우 모두 참이다.
㉡ 역 '$x>1$ 또는 $y>1$ 이면 $x+y>2$ ' 에 서 $x=2,\ y=-3$ 일 때 $2-3<2$ 이므로 거짓 이다. 대우 '$x \leq 1$ 이고 $y \leq 1$ 이면 $x+y \leq 2$ '는 참이다.
㉢ 역 '$\triangle ABC$ 가 이등변삼각형이면 $\angle A = \angle B$ '는 $\angle A = \angle C$ 또는 $\angle B=\angle C$ 일 때도 $\triangle ABC$ 는 이등변삼각형이므로 거짓이다.
주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.
따라서 역과 대우가 모두 참인 것은 ㉠뿐이다.

8. 두 조건 $p : x^2 - ax - 6 > 0$, $q : x^2 + 2x - 3 \neq 0$에 대하여 $p \rightarrow q$가 참일 때 a의 최댓값, 최솟값의 합은?

① -7 ② -6 ③ -5 ④ -4 ⑤ -3

해설

$p \rightarrow q$는 $\sim q \rightarrow \sim p$와 동치임을 이용

$\therefore x^2 + 2x - 3 = 0$이면 $x^2 - ax - 6 \leq 0$이다.

$x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1) = 0$,

$x = -3,\ 1$이면 $x^2 - ax - 6 \leq 0$이다.

1) $x = -3$: $9 + 3a - 6 \leq 0 \rightarrow a \leq -1$

2) $x = 1$: $1 - a - 6 \leq 0 \rightarrow a \geq -5$

$\therefore -5 \leq a \leq -1$

따라서, $-5 + (-1) = -6$

9. $a>0,\ b>0,\ c>0$일 때, $\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{c}$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

산술-기하평균 부등식에 의해

$$\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{b}{a}\times\frac{c}{b}\times\frac{a}{c}}=3$$

$$\therefore\ \frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c} \geq 3$$

10. 자연수 a, k 에 대하여 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3,\ k\}$ 에서 집합 $Y = \{4,\ 7,\ a^4,\ a^2+3a\}$ 로의 함수 $f(x) = 3x+1$ 이 일대일 대응일 때, $a+k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

함수 f 가 일대일 대응이고, $f(x) = 3x+1$ 에서 $f(1) = 4,\ f(2) = 7$ 이므로

$f(3) = a^4$ 또는 $f(3) = a^2+3a$ 이어야 한다.

만약 $f(3) = a^4$ 이면 $a^4 = 3\times3+1 \quad \therefore a^4 = 10$

그런데 $a^4 = 10$ 을 만족하는

자연수 a 가 존재하지 않으므로 모순이다.

$\therefore f(3) = a^2+3a,\ f(k) = a^4$

$f(3) = a^2+3a$ 에서 $a^2+3a = 10$

$a^2+3a-10 = 0,\quad (a-2)(a+5) = 0$

$\therefore a = 2(\because a$는 자연수$)$

$f(k) = a^4$, 즉 $a^4 = 3k+1$ 에서 $3k+1 = 16$

$\therefore k = 5$

$\therefore a+k = 2+5 = 7$

11. 두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$, $Y=\{5,\ 6,\ 7\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수의 개수를 a, 일대일 대응의 개수를 b 라고 할 때, $a+b$ 의 값은?

① 27 ② 30 ③ 33 ④ 36 ⑤ 39

해설

집합 X 에서 Y 로의 함수의 개수는

$a=3\times3\times3=27$

집합 X 에서 Y 로의 일대일 대응의 개수는

$b=3\times2\times1=6$

$\therefore a+b=27+6=33$

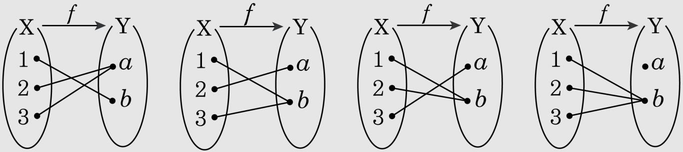
12. 두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$, $Y=\{a,\ b\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 f 중 $f(1)=b$ 인 것의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 4 개

해설

$f(1)=b$ 인 함수 f 는 다음과 같다
따라서, 구하는 함수 f 는 4 개이다.



13. 두 함수 $f(x) = 3x - 1,\ g(x) = 4 - 3x$ 에 대하여 $h \circ f = g$ 를 만족하는 일차함수 $h(x)$는?

① $h(x) = \frac{1}{3}(x+1)$

② $h(x) = 3x - 1$

③ $h(x) = x - 3$

④ $h(x) = 3 - x$

⑤ $h(x) = x + 3$

해설

$(h \circ f)(x) = 4 - 3x$에서

$f(x) = t$라 하면 $t = 3x - 1,\ 3x = t + 1$

$x = \frac{1}{3}(t+1)$ 을 대입하면

$h(t) = 4 - 3 \times \frac{1}{3}(t+1) = 3 - t$

$\therefore\ h(x) = 3 - x$

14. 두 집합 $X = \{x \mid 0 \le x \le 2\}$, $Y = \{y \mid a \le y \le b\}$ 에서 $f : X \to Y$, $f(x) = 3x - 1$ 의 역함수 $f^{-1} : Y \to X$ 가 존재할 때, 실수 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

함수 $f(x)$ 는 역함수가 존재하므로 일대일 대응이다. 따라서 함수 $f(x)$ 는 점 $(0,\ a)$, $(2,\ b)$를 지나야 한다.

$a = f(0) = -1$, $b = f(2) = 5$

$\therefore\ a + b = 4$

15. $f : R \to R$, $f(x) = x|x| + a$에서 $f^{-1}(2) = -1$ 일 때, $(f^{-1} \cdot f^{-1})(2)$의 값은?(단, f^{-1} 는 f 의 역함수)

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$f^{-1}(2) = -1$ 에서 $f(-1) = 2$ 이므로

$-1 + a = 2$

$\therefore\ a = 3$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & (x \geq 0) \\ -x^2 + 3 & (x < 0) \end{cases}$$

$(f^{-1} \cdot f^{-1})(2) = f^{-1}(-1) = k$ 라 하면

$f(k) = -1$ 이므로 $k < 0$

즉 $-k^2 + 3 = -1$

$\therefore\ k^2 = 4$

$\therefore\ k = -2$

16. 분수식 $\dfrac{x^2}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{y^2}{(y-x)(y-z)}+\dfrac{z^2}{(z-x)(z-y)}$ 를 간단히 하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 1

해설

$$\frac{x^2(z-y)+y^2(z-x)+z^2(y-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)} \cdots ①$$

①에서 분자를 x에 관하여 정리하면

$x^2(z-y)+y^2(z-x)+z^2(y-x)$

$=(z-y)x^2-(z^2-y^2)x+yz^2-y^2z$

$=(z-y)x^2-(z+y)(z-y)x+zy(z-y)$

$=(z-y)\{x^2-(z+y)x+zy\}$

$=(z-y)(x-z)(x-y)=(x-y)(y-z)(z-x)$

$\therefore$ (준식) $=\dfrac{(x-y)(y-z)(z-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)}=1$

17. 등식 $\dfrac{3x}{x^3+1} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{bx+c}{x^2-x+1}$ 가 x에 관한 항등식일 때, $a+b+c$의 값은?

① -2 ② -6 ③ 1 ④ 2 ⑤ $\dfrac{7}{4}$

해설

$$\frac{3x}{x^3+1} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}$$

$$= \frac{a(x^2-x+1)+(x+1)(bx+c)}{x^3+1}$$

$$= \frac{ax^2-ax+a+bx^2+bx+cx+c}{x^3+1}$$

$$= \frac{(a+b)x^2+(b-a+c)x+a+c}{x^3+1}$$

$a+b=0,\ b-a+c=3,\ a+c=0$을 연립하여 풀면

$a=-1,\ b=1,\ c=1$

$\therefore\ a+b+c=1$

18. 작년에 3 만원 하던 야구 배트와 2 만원 하던 글러브가 올해는 각각 10 %, 15 % 가 인상되었다. 야구 배트와 글러브를 한 세트로 볼 때, 한 세트의 인상률은?

① 11.5 % ② 12 % ③ 12.5 %

④ 13 % ⑤ 13.5 %

해설

작년의 한 세트의 가격 : $30000 + 20000 = 50000$ (원)

금년의 야구 배트의 가격 : $30000 \times \left(1 + \frac{10}{100}\right) = 33000$ (원)

금년의 글러브의 가격 : $20000 \times \left(1 + \frac{15}{100}\right) = 23000$ (원)

금년의 한 세트의 가격 : $33000 + 23000 = 56000$ (원)

따라서 한 세트의 가격은 $56000 - 50000 = 6000$ (원) 인상되었으므로,

인상률은 $\frac{6000}{50000} \times 100 = 12(\%)$ 이다.

19. 함수 $y = \dfrac{bx+c}{x+a}$ 의 그래프가 점 $(1, 2)$ 를 지나고 $x = 3$, $y = 1$ 을 점근선으로 할 때, 상수 a, b, c 에 대해서 $a - b - c$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

점근선이 $x = 3$, $y = 1$ 이므로
$a = -3$, $b = 1$ 이다.
그리고 점 $(1, 2)$ 를 지나므로,

$2 = \dfrac{1+c}{1-3}$, $c = -5$

$\therefore\ a - b - c = 1$

20. 분수함수 $y = \dfrac{x-1}{x-2}$ 의 그래프가 직선 $y = -x + a$에 대하여 대칭일 때, 상수 a의 값을 구하면?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

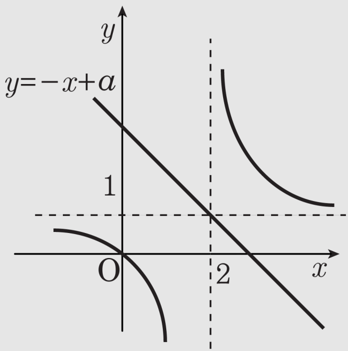
$$y = \frac{x-1}{x-2} = \frac{(x-2)+1}{x-2} = \frac{1}{x-2} + 1$$

즉, 점근선이 $x = 2,\ y = 1$ 인 분수함수이므로 그래프는 다음 그림과 같다.

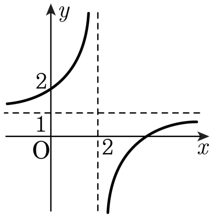
이 그래프가 직선 $y = -x + a$ 에 대하여 대칭이 되려면 직선 $y = -x + a$ 가 두 점근선의 교점인 $(2,\ 1)$ 을 지나야 하므로

$1 = -2 + a$

$\therefore\ a = 3$



21. 함수 $y = \dfrac{a}{x-p} + q$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때 $a+p+q$의 값은?



① -1　　② 0　　③ 1

④ 2　　⑤ 3

해설

$y = \dfrac{a}{x-2} + 1$ 에서 $f(0) = 2$ 이므로 $2 = \dfrac{a}{-2} + 1$

$\therefore\ a = -2$

$\therefore\ a + p + q = -2 + 2 + 1 = 1$

22. 분수함수 $f(x)=\dfrac{x+3}{2x-1}$ 에 대하여 합성함수 $y=(f\circ f\circ f)(x)$ 의 그래프는 점 $(a,\ b)$ 에 대하여 대칭이다. 이 때, $a+b$ 의 값을 구하면?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

분수함수 $f(x)=\dfrac{x+3}{2x-1}$ 에서

$$(f\circ f)(x)=f(f(x))=\frac{\dfrac{x+3}{2x-1}+3}{2\cdot\dfrac{x+3}{2x-1}-1}$$

$$=\frac{x+3+3(2x-1)}{2(x+3)-(2x-1)}=x$$ 이므로

$y=(f\circ f\circ f)(x)=f((f\circ f)(x))=f(x)$

따라서, $y=f(x)$ 의 점근선은

$x=\dfrac{1}{2},\ y=\dfrac{1}{2}$ 이고, 그 그래프는 점근선의

교점 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ 에 대하여 대칭이므로

$a=\dfrac{1}{2},\ b=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ a+b=1$

23. $x-y<0,\ xy<0$일 때, $\sqrt{x^2-2xy+y^2}+\sqrt{x^2}-|y|$를 간단히 하면?

① $2x$ ② $2y$ ③ $-2x$

④ $-2y$ ⑤ $2x-2y$

해설

$x-y<0,\ \ xy<0 \Rightarrow x<0,\ \ y>0$

$\sqrt{x^2-2xy+y^2}+\ \sqrt{x^2}-|y|$

$=\ \sqrt{(x-y)^2}+|x|-|y|$

$=|x-y|+|x|-|y|$

$=-(x-y)-x-y=-2x$

24. 유리수 x, y가 $(x-2\sqrt{2})(2\sqrt{2}-y)=4\sqrt{2}$를 만족시킬 때 x^3+y^3의 값은?

① 45 ② 56 ③ 48 ④ 37 ⑤ 26

해설

$2\sqrt{2}x-xy-8+2\sqrt{2}y=4\sqrt{2}$

$-xy-8+(2x+2y-4)\sqrt{2}=0$

$xy=-8,\ \ x+y=2$

$$\begin{aligned}\therefore x^3+y^3&=(x+y)^3-3xy(x+y)\\&=2^3-3\cdot(-8)\cdot 2=56\end{aligned}$$

25. $x > 2$에서 정의된 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $f(x) = \sqrt{x-2}+2$, $g(x) = \dfrac{1}{x-2}+2$일 때 $(f \cdot g)(3) + (g \cdot f)(3)$의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 6

해설

$(f \cdot g)(3) = f(g(3)) = f(3) = 3$

$(g \cdot f)(3) = g(f(3)) = g(3) = 3$

$\therefore (f \cdot g)(3) + (g \cdot f)(3) = 6$

26. 두 집합 X, Y 에 대하여 기호 $\otimes$ 를 $X \otimes Y = \{x \times y | x \in X$ 그리고 $y \in Y\}$ 라고 약속한다.
$A = \{0,\ 1,\ 2\}$, $B = \{1,\ 2\}$ 일 때, $A \otimes B$ 를 구하면?

① $\{0,\ 1,\ 2,\ 4\}$ ② $\{0,\ 1,\ 2\}$ ③ $\{0,\ 1\}$
④ $\{0\}$ ⑤ $\{1, 2\}$

해설

$$A \otimes B$$
$$= \{0 \times 1,\ 0 \times 2,\ 1 \times 1, 1 \times 2,\ 2 \times 1,\ 2 \times 2\}$$
$$= \{0,\ 1,\ 2,\ 4\}$$

27. 세 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3, \cdots,\ 7\}$, $B = \{x \mid x$는 9보다 작은 홀수$\}$, $C = \{x \mid x = 2 \times n + 1, n = 0,\ 1\}$ 에 대하여 A, B, C 사이의 포함 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $C \subset A \subset B$ ② $A \subset B \subset C$ ③ $B \subset A \subset C$

④ $C \subset B \subset A$ ⑤ $A \subset C \subset B$

해설

$B = \{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$, $C = \{1,\ 3\}$

따라서 $C \subset B \subset A$ 의 포함 관계가 성립한다.

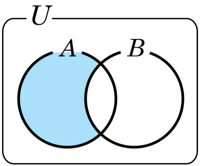
28. 두 집합 A, B 에 대하여 $A=\{x \mid x \geq 1\}$, $B=\{x \mid x^2-2ax+2a \leq 0\}$ 일 때, $B \subset A$ 가 되도록 하는 실수 a 의 범위는?

① $a>0$ ② $a \geq 0$ ③ $a>1$ ④ $a>2$ ⑤ $a \geq 2$

해설

(i) $B=\phi$ 일 때,
당연히 $B \subset A$ 이므로
$B=\{x \mid x^2-2ax+2a \leq 0\}=\phi$ 에서
이차방정식 $x^2-2ax+2a=0$ 의 판별식을 D 라 하면 $\frac{D}{4}=$
$a^2-2a<0$
$\therefore\ 0<a<2$
(ii) $B \neq \phi$ 일 때,
이차방정식 $x^2-2ax+2a=0$ 의 두 근을
α, β $(\alpha \leq \beta)$ 라 하면
$x^2-2ax+2a \leq 0 \Leftrightarrow (x-\alpha)(x-\beta) \leq 0$
이 때, $B=\{x \mid \alpha \leq x \leq \beta\} \subset \{x \mid x \geq 1\}=A$ 이므로 $\alpha \geq 1$ 이고
$\beta \geq 1$ 이어야 한다.
따라서, $f(x)=x^2-2ax+2a$ 라 하면
㉠ $\frac{D}{4}=a^2-2a \geq 0$ 에서
$a \leq 0$ 또는 $a \geq 2$
㉡ $f(1) \geq 0$ 에서 $1>0$ 이므로
a 는 모든 실수
㉢ (대칭축) ≥ 1 에서 $a \geq 1$
㉠, ㉡, ㉢의 공통범위는 $a \geq 2$
(i), (ii) 에서 $a>0$

29. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 다음 그림과 같이 벤 다이어그램을 그린 후 원소를 써 넣어 보았더니 색칠한 부분에는 원소가 하나도 없었다. 다음 중 항상 옳은 것은?

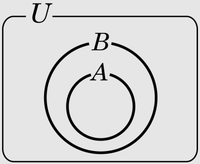


① $B \subset A$　② $n(A) < n(B)$　③ $A \cup B = B$

④ $B - A = \varnothing$　⑤ $A^c \subset B^c$

해설

주어진 벤 다이어그램에서 색칠한 부분이 공집합이므로 집합 A 는 집합 B 에 포함된다. 따라서 $A \cup B = B$ 가 항상 성립한다.



30. 다음 중 p가 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것을 모두 고르면? (단, a, b, c 는 실수이다.)

㉠ p : $|a|+|b|=0$ q : $ab=0$

㉡ p : $(a-b)(b-c)=0$ q : $(a-b)^2+(b-c)^2=0$

㉢ $p : 0<x<y$ $q : x^2<y^2$

㉣ $p : x<y$ $q : [x]<[y]$ (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수)

① ㉠, ㉡ ② ㉡, ㉢ ③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉣ ⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠ p : $|a|+|b|=0 \Leftrightarrow a=0$이고 $b=0$ q : $ab=0 \Leftrightarrow a=0$ 또는 $b=0$ $\therefore p \Rightarrow q$ 이고 $p \nLeftarrow q$ 이므로 만족
㉡ p : $(a-b)(b-c)=0$ $a=b$ 또는 $b=c$ q : $a=b$ 그리고 $b=c$ $\therefore p \nRightarrow q$이고 $p \Leftarrow q$ 이므로 필요조건만 만족한다.
㉢ $p \Rightarrow q$ ($\because$ x, y 모두 양수) $p \nLeftarrow q$ ($\because$ x, y 모두 음수이거나 서로 부호가 다를 때 참이 아닐 수 있다.) $\therefore$ 만족
㉣ $p \nRightarrow q$ ($\because x=1, y=1.5$ 일 때 $[1]=[1.5]=1$일 수 있다.) $p \Leftarrow q$ 이므로 필요조건만 만족

31. 집합 $M=\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \cdots, \frac{1}{2^{10}}\right\}$ 의 공집합이 아닌 모든 부분집합을 $S_1, S_2, \cdots, S_N$ $(N=2^{10}-1)$ 이라고 하자. 집합 $S_1, S_2, \cdots, S_N$ 의 최소 원소들의 합을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 5

해설

최소 원소가 $\frac{1}{2}$ 인 부분집합의 개수 $\rightarrow$ 1

최소 원소가 $\frac{1}{2^2}$ 인 부분집합의 개수 $\rightarrow$ 2^1

$\vdots$

최소 원소가 $\frac{1}{2^{10}}$ 인 부분집합의 개수 $\rightarrow$ 2^9

$$\therefore\ \frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{2^2}\times 2^1+\cdots+\frac{1}{2^{10}}\times 2^9=5$$

32. 1 부터 어떤 수까지의 자연수 중 k 의 배수를 원소로 하는 집합을 $P_{(k)}$ 라고 정의한다. $n(P_{(3)})=a$, $n(P_{(4)})=b$, $n(P_{(12)})=c$ 라고 할 때, $n((P_{(3)}\cup P_{(6)})\cup(P_{(2)}\cap P_{(4)}))$ 를 a, b, c 로 나타내어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a+b-c$

해설

$n(P_{(3)})=a$ $n(P_{(4)})=b$, $n(P_{(12)})=c$ 라고 할 때

$$\begin{aligned}&n((P_{(3)}\cup P_{(6)})\cup(P_{(2)}\cap P_{(4)}))\\&=n(P_3\cup P_4)\\&=n(P_{3)})+n(P_4)-n(P_{12})\\&=a+b-c\end{aligned}$$

33. 자연수 n에 대하여 $\sqrt{10+\sqrt{n}}+\sqrt{10-\sqrt{n}}$이 자연수 k가 될 때, $n+k$의 값을 구하면?

① 12 ② 22 ③ 32 ④ 42 ⑤ 52

해설

$\sqrt{10+\sqrt{n}}+\sqrt{10-\sqrt{n}}=k$ (n, k는 자연수)

양변을 제곱하면

$10+\sqrt{n}+2\sqrt{100-n}+10-\sqrt{n}=k^2$

$\therefore k^2-20=2\sqrt{100-n} \cdots$ (i)

이때, $0 \le k^2-20 < 20$ ($\because$ $0 \le \sqrt{100-n} < 10$) 이고, k^2-20은 짝수이므로 k^2도 짝수이다.

$20 \le k^2 < 40$을 만족하는 짝수의 제곱수는

36이므로 $k^2=36$

$\therefore k=6$

(i)에서 $n=36$

$\therefore$ $n+k=42$