

1. 다음 집합의 관한 설명 중 옳지 않은 것을 모두 고르면?

① $A = \{\emptyset\}$ 일 때, $n(A) = 1$

② $B = \{0\}$ 일 때, $n(B) = 0$

③ $C = \{x \mid x \text{는 } 12 \text{의 약수}\}$ 일 때, $n(C) = 6$

④ $n(\{a, b, c\}) - n(\{a, b\}) = c$

⑤ $n(\{0, 1, 2\}) = 3$

해설

② $B = \{0\}$ 일 때, $n(B) = 1$

④ $n(\{a, b, c\}) - n(\{a, b\}) = 1$

2. $A = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 짝수}\}$ 일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (정답 2개)

- ① $A \subset B$ ② $10 \in B$ ③ $\emptyset \subset A$
④ $2 \subset B$ ⑤ $7 \in B$

해설

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$,
 $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

- ① $B \subset A$
④ $2 \in B$
⑤ $7 \notin B$

5. 두 집합 A, B 에 대하여 $A \cup B$ 와 집합 B 가 다음과 같을 때, 다음 중 집합 A 가 될 수 없는 것은?

$$A \cup B = \{x \mid x \text{는 } 8 \text{의 약수}\}, B = \{x \mid x \text{는 } 3 \text{미만의 자연수}\}$$

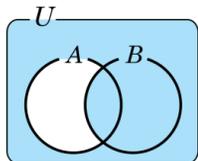
- ① $\{1, 4, 8\}$
- ② $\{x \mid x \text{는 } 12 \text{의 약수}\}$
- ③ $\{4, 8\}$
- ④ $\{x \mid x \text{는 } 8 \text{ 이하인 } 4 \text{의 배수}\}$
- ⑤ $\{x \mid x \text{는 } 1 \text{보다 큰 } 8 \text{의 약수}\}$

해설

집합 $B = \{1, 2\}$ 이고, $A \cup B = \{1, 2, 4, 8\}$ 이므로 집합 A 는 원소 4, 8을 반드시 포함하는 $A \cup B$ 의 부분집합이다.

② $\{x \mid x \text{는 } 12 \text{의 약수}\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} \not\subset \{1, 2, 4, 8\}$

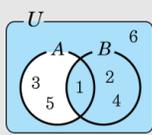
7. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여
 $A = \{x \mid x \text{는 } 5 \text{ 이하의 홀수}\}$,
 $B = \{x \mid x \text{는 } 4 \text{의 약수}\}$ 일 때, 다음 벤 다이어그램에서 색칠된 부분을 나타내는 집합은?



- ① $\{1, 2, 4\}$ ② $\{1, 2, 6\}$ ③ $\{1, 3, 6\}$
 ④ $\{1, 2, 4, 6\}$ ⑤ $\{1, 2, 5, 6\}$

해설

$A = \{1, 3, 5\}, B = \{1, 2, 4\}$ 이므로



색칠한 부분은 $\{1, 2, 4, 6\}$ 이다.

8. 두 집합 $A = \{1, a, a + 2\}$, $B = \{3, a - 2, 2 \times a\}$ 에 대하여 $A - B = \{5\}$ 일 때, a 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$a - b = \{5\}$ 이므로 $5 \in A$ 이다.

(1) $a = 5$ 일 때, $A = \{1, 5, 7\}$, $B = \{3, 10\}$ 이므로 $A - B = \{1, 5, 7\} \neq \{5\}$ 이다.

(2) $a + 2 = 5$, 즉 $a = 3$ 일 때, $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{1, 3, 6\}$ 이므로 $A - B = \{5\}$ 이다.

(1), (2)에서 $a = 3$ 이다.

9. 두 집합 A, B 에 대하여 $n(A) = 43, n(B) = 28, n(A \cup B) = 50$ 일 때, $n(A - B) + n(B - A)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 29

해설

$$n(A - B) = n(A \cup B) - n(B) = 50 - 28 = 22$$

$$n(B - A) = n(A \cup B) - n(A) = 50 - 43 = 7$$

$$\therefore n(A - B) + n(B - A) = 22 + 7 = 29$$

10. A 중학교 1학년 6반 학생은 모두 40명이다. 수학을 좋아하는 학생은 26명, 사회를 좋아하는 학생은 18명, 수학 또는 사회를 좋아하는 학생은 36명이다. 수학만 좋아하는 학생은 몇명인가?

- ① 6명 ② 7명 ③ 10명 ④ 14명 ⑤ 18명

해설

전체 학생의 집합을 U , 수학을 좋아하는 학생의 집합을 A , 사회를 좋아하는 학생들의 집합을 B 라 하자.

$n(U) = 40, n(A) = 26, n(B) = 18, n(A \cup B) = 36$ 이다.

$n(A - B) = n(A \cup B) - n(B) = 36 - 18 = 18$ 이다.

11. 다음 <보기>의 조건 ' $p(x)$ '를 만족하는 진리집합이 바르게 연결된 것은? (단, 전체집합은 실수의 집합 R)

보기

- (1) $p(x)$: x 는 12의 양의 약수이다.
 $P = \{1, 2, 3, 6, 12\}$
(2) $p(x)$: $x^2 + 1 = 0$
 $P = \emptyset$
(3) $p(x)$: $x^2 - 5x - 4 = 0$
 $P = \{1, 4\}$
(4) $p(x)$: $x^2 + 4x + 5 > 0$
 $P = R$

- ① (1), (2) ② (2), (3) ③ (3), (4)
④ (2), (4) ⑤ (1), (3)

해설

- (1) $P = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
(2) $x^2 \geq 0$ 이므로 $x^2 + 1 \neq 0 \therefore P = \emptyset$
(3) $P = \left\{ \frac{5 \pm \sqrt{41}}{2} \right\}$
(4) 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 + 1 > 0$ 이므로 $P = R$ 이다.

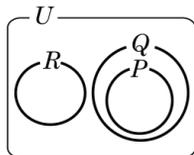
12. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 두 원소 x, y 에 대하여 다음 명제 중 거짓인 것은?

- ① 어떤 x, y 에 대하여 $x^2 + y^2 = 5$ 이다.
- ② 어떤 x, y 에 대하여 $x + y \leq 5$ 이다.
- ③ 모든 x 에 대하여 $x - 1 < 5$ 이다.
- ④ 어떤 x 에 대하여 $x^2 - 1 \leq 0$ 이다.
- ⑤ 모든 x 에 대하여 $|x - x^2| \geq 5$ 이다.

해설

⑤ (반례) $x = 1$ 인 경우 $|1 - 1| = 0$ 이므로 거짓이다.

13. 세 조건 p, q, r 를 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 라고 할 때, 이들 사이의 포함 관계는 다음 그림과 같다. 다음 명제 중 거짓인 것은?



- ① $r \rightarrow \sim q$ ② $r \rightarrow \sim p$ ③ $p \rightarrow \sim r$
 ④ $\sim q \rightarrow \sim p$ ⑤ $p \rightarrow \sim q$

해설

명제의 참, 거짓은 각각의 조건을 만족하는 집합의 포함 관계로 판별할 수 있다.

- ① $R \subset Q^c$ 이므로 $r \rightarrow \sim q$ 는 참이다.
 ② $R \subset P^c$ 이므로 $r \rightarrow \sim p$ 는 참이다.
 ③ $P \subset R^c$ 이므로 $p \rightarrow \sim r$ 는 참이다.
 ④ $Q^c \subset P^c$ 이므로 $\sim q \rightarrow \sim p$ 는 참이다.
 ⑤ $P \not\subset Q^c$ 이므로 $p \rightarrow \sim q$ 는 거짓이다.

14. 아래의 두 조건에 대하여 명제 $p \rightarrow q$ 가 거짓임을 보이는 반례들의 집합을 구하면?

「 p : x 는 18의 약수, q : x 는 12의 약수」

- ① {1, 2, 3, 6} ② {6, 12, 9, 8} ③ {9, 18}
④ {12, 18} ⑤ {6, 9, 18}

해설

두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 하면, $P = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$, $Q = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 이므로 반례들의 집합은 $P - Q = \{9, 18\}$

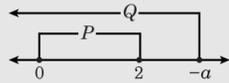
15. 실수 x 에 대한 두 조건 $p : 0 \leq x \leq 2$, $q : x + a \leq 0$ 이 있다. 명제 $p \rightarrow q$ 가 참일 때, a 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

p , q 를 만족하는 집합을 각각 P , Q 라 하면 $p \rightarrow q$ 가 참이므로 $P \subset Q$ 이다. $P = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$, $Q = \{x | x \leq -a\}$



위의 그림에서 $P \subset Q$ 이려면 $2 \leq -a$, $a \leq -2$ 따라서 a 의 최댓값은 -2

16. 다음 중 그 역이 거짓인 명제를 찾으시오?

① 두 집합 A, B 에 대하여 $A \supset B$ 이면 $A \cup B = A$ 이다.

② $x > 0$ 이고 $y > 0$ 이면 $x + y > 0$ 이다.

③ x 가 3 의 배수이면 x 는 9 의 배수이다.

④ $xz = yz$ 이면 $x = y$ 이다.

⑤ $x^2 + y^2 \neq 0$ 이면 $x \neq 0$ 또는 $y \neq 0$ 이다.

해설

- ① 두 집합 A, B 에 대하여 $A \supset B$ 이면 $A \cup B = A$ 이다. (참)
- ② $x \leq 0$ 또는 $y \leq 0$ 이면 $x + y \leq 0$ 이다. \Rightarrow 반례 :
 $x = -3, y = 5$ (거짓)
- ③ x 가 3 의 배수가 아니면 x 는 9 의 배수가 아니다. (참)
- ④ $xz \neq yz$ 이면 $x \neq y$ 이다. (참)
- ⑤ $x^2 + y^2 = 0$ 이면 $x = 0$ 이고 $y = 0$ 이다. (참)

17. $x \geq a$ 가 $-2 \leq x-1 \leq 2$ 이기 위한 필요조건일 때, 상수 a 의 최댓값을 구하면?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$-1 \leq x \leq 3$ 이므로 $a \leq -1$ 이어야 한다.

18. 다음 [보기] 중 절대부등식인 것의 개수는? (단, x, y, z 는 실수이다.)

보기

- ㉠ $x^2 - xy + y^2 \geq 0$
- ㉡ $x^2 + 4x \geq -4$
- ㉢ $|x| + |y| \geq |x - y|$
- ㉣ $x^2 \geq 0$
- ㉤ $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$

- ① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$$\begin{aligned} \text{㉠ } x^2 - xy + y^2 &= x^2 - yx + \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{4}y^2 + y^2 \\ &= \left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0 \rightarrow \text{절대부등식} \end{aligned}$$

$$\text{㉡ } x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2 \geq 0 \rightarrow \text{절대부등식}$$

$$\begin{aligned} \text{㉢ } (|x| + |y|)^2 &= x^2 + 2|x||y| + y^2 \\ (|x - y|)^2 &= x^2 - 2xy + y^2 \end{aligned}$$

$$\text{㉣ } x^2 \geq 0 \rightarrow \text{절대부등식}$$

$$\begin{aligned} \text{㉤ } x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \\ &= \frac{1}{2} \{ (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \} \geq 0 \\ &\rightarrow \text{절대부등식} \end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 모두 4 개이다.

19. 다음은 $a \geq 0, b \geq 0$ 인 두 실수 a, b 에 대하여 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 임을 증명한 것이다. 물음에 답하여라.

$$\begin{aligned} & [(가)] - [(나)] \\ &= \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b}}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \quad [(다)] \end{aligned}$$

따라서, [(가)] \geq [(나)]
한편, 등호는 [(다)]일 때 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

- ① (가) $a+b$ (나) \sqrt{ab} (다) ≥ 0 (다) $a=0, b=0$
 ② (가) $\frac{a+b}{2}$ (나) $2\sqrt{ab}$ (다) ≤ 0 (다) $a=0, b=0$
 ③ (가) $\frac{a+b}{2}$ (나) \sqrt{ab} (다) ≥ 0 (다) $a=b$
 ④ (가) \sqrt{ab} (나) $a+b$ (다) ≥ 0 (다) $a=b$
 ⑤ (가) $2\sqrt{ab}$ (나) $\frac{a+b}{2}$ (다) ≤ 0 (다) $a=0, b=0$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \\ &= \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b}}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0 \\ \therefore \frac{a+b}{2} &\geq \sqrt{ab} \end{aligned}$$

한편, 등호는 $a=b$ 일 때 성립한다.

20. $x > 0, y > 0$ 일 때, $\left(2x + \frac{1}{x}\right)\left(\frac{8}{y} + y\right)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 16

해설

$x > 0, y > 0$ 이므로

$$\left(2x + \frac{1}{x}\right)\left(\frac{8}{y} + y\right) = 16 \cdot \frac{x}{y} + 2xy + \frac{8}{xy} + \frac{y}{x} \text{에서}$$

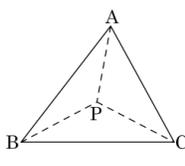
$$16 \cdot \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \cdot \sqrt{16 \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}} = 8$$

$$2xy + \frac{8}{xy} \geq 2 \cdot \sqrt{2xy \cdot \frac{8}{xy}} = 8$$

$$\therefore 16 \cdot \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2xy + \frac{8}{xy} \geq 16$$

21. 넓이가 a 인 삼각형 ABC의 내부에 한 점 P에 대하여 $\triangle PAB$, $\triangle PBC$, $\triangle PCA$ 의 넓이를 각각 S_1 , S_2 , S_3 이라 할 때 $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$ 의 최솟값은?

- ① $\frac{a^2}{3}$ ② a^2 ③ $\sqrt{3}a^2$
 ④ $3a^2$ ⑤ $3\sqrt{3}a^2$



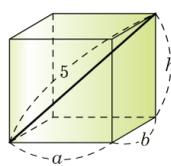
해설

$$S_1 + S_2 + S_3 = a$$

$$(1^2 + 1^2 + 1^2)(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) \geq (S_1 + S_2 + S_3)^2 = a^2$$

$$\therefore S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \geq \frac{a^2}{3}$$

22. 코시-슈바르츠 부등식 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geq (ax+by+cz)^2$ 을 이용하여 가로, 세로, 높이가 각각 a, b, h 이고, 대각선의 길이가 5인 직육면체에서 모든 모서리의 길이의 합의 최댓값을 구하면?



- ① $5\sqrt{3}$ ② $4\sqrt{5}$ ③ $20\sqrt{3}$
 ④ $25\sqrt{5}$ ⑤ $24\sqrt{6}$

해설

$$a^2 + b^2 + h^2 = 25$$

코시-슈바르츠 부등식을 이용한다.

$$(a^2 + b^2 + h^2)(4^2 + 4^2 + 4^2) \geq (4a + 4b + 4h)^2$$

$$25 \cdot 48 \geq (4a + 4b + 4h)^2$$

$$\Rightarrow 4(a + b + h) \leq 5\sqrt{48} = 20\sqrt{3}$$

\therefore 모서리의 길이의 합 $4(a + b + h)$ 의 최댓값

$$: 20\sqrt{3}$$

23. 전체집합 U 의 세 부분집합 A, B, C 에 대하여 집합연산이 옳지 않은 것은?

- ① $(A - B) \cup (A - C) = A - (B \cap C)$
- ② $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c$
- ③ $(A - C) \cup (B - C) = (A \cup B) - C$
- ④ $(A \cup C) - (B \cup C) = A - (B \cup C)$
- ⑤ $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cup C)$

해설

① 좌변
 $= (A - B) \cup (A - C)$
 $= (A \cap B^c) \cup (A \cap C^c)$ (\because 차집합의 성질)
 $= A \cap (B^c \cup C^c)$
 $= A \cap (B \cap C)^c$ (\because 분배법칙과 드 모르간의 법칙)
 $= A - (B \cap C)$
 $=$ 우변 (\because 차집합의 성질)

② 우변
 $= (A \cup B) \cap (A \cap B)^c$
 $= (A \cup B) - (A \cap B)$ (\because 차집합의 성질)
 벤다이어그램을 그려보면 좌변과 같음을 확인할 수 있다.

③ 좌변
 $= (A - C) \cup (B - C)$
 $= (A \cap C^c) \cup (B \cap C^c)$ (\because 차집합의 성질)
 $= (A \cup B) \cap C^c$
 $= (A \cup B) - C$ (우변) (\because 분배법칙과 차집합의 성질)

④ 좌변
 $= (A \cup C) - (B \cup C)$
 $= (A \cup C) \cap (B \cup C)^c$ (\because 차집합의 성질)
 $= [A \cap (B \cup C)^c] \cup [C \cap (B \cup C)^c]$ (\because 분배법칙)
 $= [A \cap (B \cup C)^c] \cup [C \cap (B^c \cap C^c)]$ (\because 드 모르간의 법칙)
 $= [A \cap (B \cup C)^c] \cup \emptyset$
 $= A \cap (B \cup C)^c$
 $= A - (B \cup C)$ (우변)

⑤ 좌변
 $= A - (B - C) = A \cap (B \cap C)^c$
 $= A \cap (B^c \cup C)$ (\because 차집합의 성질과 드 모르간의 법칙)
 $= (A \cap B^c) \cup (A \cap C)$
 $= (A - B) \cup (A \cap C) \neq$ 우변 \rightarrow 모두를 벤다이어그램을 그려서 비교할 수 있다.

24. 집합 $U = \{x \mid 1 \leq x \leq 30, x \text{는 자연수}\}$ 의 두 부분집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 3 \text{의 배수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 2 \text{의 배수}\}$ 에 대하여 $A - B^c$ 의 원소의 개수는?

- ① 2개 ② 3개 ③ 5개 ④ 7개 ⑤ 8개

해설

$$A - B^c = A \cap B = \{x \mid x \text{는 } 6 \text{의 배수}\} = \{6, 12, 18, 24, 30\}$$

\therefore 5개

25. 다음 보기 중에서 p 는 q 이기 위한 필요충분조건인 것은 몇 개인가?
(단 x, y 는 실수이다.)

- ㉠ $p : -1 < x < 1 \quad q : x < 3$
- ㉡ $p : |x - 1| = 2 \quad q : x^2 - 2x + 3 = 0$
- ㉢ $p : x^2 + y^2 = 0 \quad q : xy = 0$
- ㉣ $p : A^c \cup B = U \quad q : A \subset B$
- ㉤ $p : |x| = 1 \quad q : x = 1$

- ① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

- ㉠ p 는 q 이기 위한 충분조건만 된다.
 - ㉡ p 는 q 이기 위한 아무 조건도 아니다.
 - ㉢ p 는 q 이기 위한 충분조건만 된다.
 - ㉣ p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.
즉, $A^c \cup B = U$ 와 $A \subset B$ 은 동치이다.
 - ㉤ p 는 q 이기 위한 필요조건만 된다.
- \therefore 1개