

1. $x^3 + 2x^2 - x + 1 = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$ 가 x 의 값에 관계없이 항상 성립하도록 하는 상수 $a + b + c + d$ 의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

양변에 $x = 2$ 를 대입하면
 $8 + 8 - 2 + 1 = a + b + c + d$
 $\therefore a + b + c + d = 15$

해설

- (i) a, b, c, d 의 값을 각각 구하려면 우변을 전개하여 계수비교를 하거나
(ii) 조립제법 : 좌변을 $x - 1$ 로 연속으로 나눌 때 나오는 나머지가 순서대로 d, c, b 가 되고 마지막 몫의 계수가 a 이다.

2. 다항식 $f(x) = x^3 - 3x^2 + kx - 6$ 이 일차식 $x - 2$ 로 나누어떨어질 때, $f(x)$ 를 $x - 1$ 로 나눈 나머지는?

① -3 ② -1 ③ 2 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$f(x) = (x - 2)Q(x)$$

$$\text{즉, } f(2) = 8 - 12 + 2k - 6 = 0$$

$$\therefore k = 5$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 6$$

$$\therefore f(1) = -3$$

3. x 의 다항식 $f(x)$ 를 $x-2$ 로 나누면 -3 이 남고, $x+3$ 으로 나누면 27 이 남는다. 이 $f(x)$ 를 $(x-2)(x+3)$ 으로 나눌 때, 그 나머지는?

① $6x-9$

② $-6x+9$

③ $2x+3$

④ $-2x-3$

⑤ $2x-3$

해설

$f(x)$ 를 $(x-2)(x+3)$ 으로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ 라 하면

$$f(x) = (x-2)(x+3)Q(x) + ax + b$$

문제의 조건으로부터

$$f(2) = -3, f(-3) = 27 \text{이므로}$$

$$2a + b = -3, -3a + b = 27$$

$$\therefore a = -6, b = 9$$

따라서 구하는 나머지는 $-6x+9$ 이다.

4. 다항식 $P(x)$ 를 $x+1$ 로 나누면 떨어지고, $x-2$ 로 나누면 나머지가 3이다. 이때, $P(x)$ 를 $(x+1)(x-2)$ 로 나누었을 때 나머지는?

① x

② $-x+1$

③ $x+1$

④ $-2x+2$

⑤ $2x+2$

해설

$$P(x) = (x+1)Q(x)$$

$$P(x) = (x-2)Q'(x) + 3$$

$$P(x) = (x+1)(x-2)Q''(x) + ax + b$$

$$P(-1) = 0, \quad P(2) = 3 \text{ 이므로,}$$

$$-a + b = 0, \quad 2a + b = 3$$

$$\therefore a = 1, \quad b = 1$$

따라서 나머지는 $x+1$ 이다.

5. $x^3 - x^2 + 2 = a(x - p)^3 + b(x - p)^2 + c(x - p)$ 가 x 에 대한항등식이 되도록 실수 $a + b + c + p$ 의 값을 구하면?

- ① -1 ② 1 ③ -2 ④ 2 ⑤ 0

해설

양변에 $x = p$ 를 대입하면
 $p^3 - p^2 + 2 = 0$
 $(p + 1)(p^2 - 2p + 2) = 0 \therefore p = -1$
따라서 주어진 식은
 $x^3 - x^2 + 2 = a(x + 1)^3 + b(x + 1)^2 + c(x + 1)$
양변에 $x = 0$ 을 대입하면 $2 = a + b + c$
 $\therefore a + b + c + p = 1$

해설

$a(x - p)^3 + b(x - p)^2 + c(x - p)$
 $= (x - p) \{a(x - p)^2 + b(x - p) + c\}$
 $\therefore (x + 1)(x^2 - 2x + 2)$
 $= (x - p) \{a(x - p)^2 + b(x - p) + c\}$
양변을 비교하면, $x + 1 = x - p$,
 $x^2 - 2x + 2 = a(x - p)^2 + b(x - p) + c$
 $\therefore p = -1$
또 $x^2 - 2x + 2 = a(x + 1)^2 + b(x + 1) + c$
 $\qquad \qquad \qquad = ax^2 + (2a + b)x + a + b + c$
 $\therefore a = 1, 2a + b = -2, a + b + c = 2$
 $\therefore b = -4, c = 5$
따라서 $a = 1, b = -4, c = 5, p = -1$
 $\therefore a + b + c + p = 1$

6. $(1 - x - x^2)^{50} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{99}x^{99} + a_{100}x^{100}$ 라 할 때, $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{100} = A$, $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{99} = B$ 에 대하여 $A + 2B$ 의 값을 구하면?

- ① -1 ② 0 ③ 1 ④ 100 ⑤ 1024

해설

(i) 양변에 $x = 1$ 을 대입하면
 $1 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{99} + a_{100} \cdots \textcircled{1}$
양변에 $x = -1$ 을 대입하면
 $1 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots - a_{99} + a_{100} \cdots \textcircled{2}$
(ii) $\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 하면 $2 = 2(a_0 + a_2 + \cdots + a_{100})$
 $\therefore a_0 + a_2 + \cdots + a_{100} = 1$
 $\therefore A = 1$
 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 하면
 $0 = 2(a_1 + a_3 + \cdots + a_{99})$
 $a_1 + a_3 + \cdots + a_{99} = 0 \quad \therefore B = 0$
 $\therefore A + 2B = 1$

7. x^{100} 을 $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때, 나머지는?

- ① $100x + 101$ ② $100x - 99$ ③ $-100x - 99$
④ $-99x - 98$ ⑤ $99x + 100$

해설

구하는 나머지를 $ax + b$ 라 하면
 $x^{100} = (x+1)^2 Q(x) + ax + b$
 x^{100} 을 $x+1$ 로 나누면 나머지는 1이므로
 $x^{100} = (x+1)^2 Q(x) + a(x+1) + 1 \ (\Rightarrow a+1=b)$
 $x^{100} - 1 = (x+1)\{(x+1)Q(x) + a\}$
 $(x^2)^{50} - 1 = (x+1)\{(x+1)Q(x) + a\}$
 $(x^2 - 1)\{(x^2)^{49} + (x^2)^{48} + \cdots + x^2 + 1\}$
 $= (x+1)\{(x+1)Q(x) + a\}$
 $(x+1)(x-1)\{(x^2)^{49} + (x^2)^{48} + \cdots + x^2 + 1\}$
 $= (x+1)\{(x+1)Q(x) + a\}$
 $(x-1)\{(x^2)^{49} + (x^2)^{48} + \cdots + x^2 + 1\} = (x+1)Q(x) + a$
양변에 $x = -1$ 을 대입하면
 $(-1-1)(1^{49} + 1^{48} + \cdots + 1 + 1) = a$
 $a = -100, a+1 = b$ 에서 $b = -99$
 $\therefore$ 구하는 나머지는 $-100x - 99$