1. $x^3+2x^2-x+1=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$가 x의 값에 관계없이 항상 성립하도록 하는 상수 $a+b+c+d$의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

양변에 $x=2$를 대입하면

$8+8-2+1=a+b+c+d$

$\therefore\ a+b+c+d=15$

해설

(ⅰ) a, b, c, d의 값을 각각 구하려면 우변을 전개하여 계수비교를 하거나

(ⅱ) 조립제법 : 좌변을 $x-1$로 연속으로 나눌 때 나오는 나머지가 순서대로 d, c, b가 되고 마지막 몫의 계수가 a이다.

2. 다항식 $f(x)=x^3-3x^2+kx-6$이 일차식 $x-2$로 나누어떨어질 때, $f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는?

① -3 ② -1 ③ 2 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(x)=(x-2)Q(x)$

즉, $f(2)=8-12+2k-6=0$

$\therefore\ k=5$

$f(x)=x^3-3x^2+5x-6$

$\therefore\ f(1)=-3$

3. x의 다항식 $f(x)$를 $x-2$로 나누면 -3이 남고, $x+3$으로 나누면 27이 남는다. 이 $f(x)$를 $(x-2)(x+3)$으로 나눌 때, 그 나머지는?

① $6x-9$ ② $-6x+9$ ③ $2x+3$

④ $-2x-3$ ⑤ $2x-3$

해설

$f(x)$를 $(x-2)(x+3)$으로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$라 하면

$f(x)=(x-2)(x+3)Q(x)+ax+b$

문제의 조건으로부터

$f(2)=-3,\ f(-3)=27$이므로

$2a+b=-3,\ \ -3a+b=27$

$\therefore\ a=-6,\ b=9$

따라서 구하는 나머지는 $-6x+9$이다.

4. 다항식 $P(x)$를 $x+1$로 나누면 떨어지고, $x-2$로 나누면 나머지가 3이다. 이때, $P(x)$를 $(x+1)(x-2)$로 나누었을 때 나머지는?

① x　　② $-x+1$　　③ $x+1$

④ $-2x+2$　　⑤ $2x+2$

해설

$P(x)=(x+1)Q(x)$

$P(x)=(x-2)Q'(x)+3$

$P(x)=(x+1)(x-2)Q''(x)+ax+b$

$P(-1)=0,\quad P(2)=3$이므로,

$-a+b=0,\quad 2a+b=3$

$\therefore\ a=1,\ b=1$

따라서 나머지는 $x+1$이다.

5. $x^3 - x^2 + 2 = a(x-p)^3 + b(x-p)^2 + c(x-p)$가 x에 대한항등식이 되도록 실수 $a+b+c+p$의 값을 구하면?

① -1 ② 1 ③ -2 ④ 2 ⑤ 0

해설

양변에 $x = p$를 대입하면
$p^3 - p^2 + 2 = 0$
$(p+1)(p^2 - 2p + 2) = 0 \therefore\ p = -1$
따라서 주어진 식은
$x^3 - x^2 + 2 = a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1)$
양변에 $x = 0$을 대입하면 $2 = a + b + c$
$\therefore\ a + b + c + p = 1$

해설

$a(x-p)^3 + b(x-p)^2 + c(x-p)$
$= (x-p)\left\{a(x-p)^2 + b(x-p) + c\right\}$
$\therefore\ (x+1)(x^2 - 2x + 2)$
$= (x-p)\left\{a(x-p)^2 + b(x-p) + c\right\}$
양변을 비교하면, $x + 1 = x - p$,
$x^2 - 2x + 2 = a(x-p)^2 + b(x-p) + c$
$\therefore\ p = -1$
또 $x^2 - 2x + 2 = a(x+1)^2 + b(x+1) + c$
$= ax^2 + (2a+b)x + a + b + c$
$\therefore\ a = 1,\ 2a + b = -2,\ a + b + c = 2$
$\therefore\ b = -4,\ c = 5$
따라서 $a = 1,\ b = -4,\ c = 5,\ p = -1$
$\therefore\ a + b + c + p = 1$

6. $(1-x-x^2)^{50}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{99}x^{99}+a_{100}x^{100}$ 라 할 때, $a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{100}=A$, $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{99}=B$ 에 대하여 $A+2B$ 의 값을 구하면?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 100 ⑤ 1024

해설

(ⅰ) 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$1=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{99}+a_{100}\cdots$ ㉠

양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$1=a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots-a_{99}+a_{100}\cdots$ ㉡

(ⅱ) ㉠+㉡ 하면 $2=2(a_0+a_2+\cdots+a_{100})$

$\therefore\ a_0+a_2+\cdots+a_{100}=1$

$\therefore\ A=1$

㉠ − ㉡하면

$0=2(a_1+a_3+\cdots+a_{99})$

$a_1+a_3+\cdots+a_{99}=0\quad\therefore\ B=0$

$\therefore\ A+2B=1$

7. x^{100} 을 $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때, 나머지는?

① $100x+101$ ② $100x-99$ ③ $-100x-99$

④ $-99x-98$ ⑤ $99x+100$

해설

구하는 나머지를 $ax+b$ 라 하면

$x^{100}=(x+1)^2Q(x)+ax+b$

x^{100} 을 $x+1$ 로 나누면 나머지는 1 이므로

$x^{100}=(x+1)^2Q(x)+a(x+1)+1\ (\Rightarrow a+1=b)$

$x^{100}-1=(x+1)\{(x+1)Q(x)+a\}$

$(x^2)^{50}-1=(x+1)\{(x+1)Q(x)+a\}$

$(x^2-1)\{(x^2)^{49}+(x^2)^{48}+\cdots+x^2+1)\}$

$=(x+1)\{(x+1)Q(x)+a\}$

$(x+1)(x-1)\{(x^2)^{49}+(x^2)^{48}+\cdots+x^2+1)\}$

$=(x+1)\{(x+1)Q(x)+a\}$

$(x-1)\{(x^2)^{49}+(x^2)^{48}+\cdots+x^2+1)\}=(x+1)Q(x)+a$

양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$(-1-1)(1^{49}+1^{48}+\cdots+1+1)=a$

$a=-100,\ a+1=b$ 에서 $b=-99$

$\therefore$ 구하는 나머지는 $-100x-99$