1. 삼차방정식 $x^3+27=0$의 모든 근의 합은?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$x^3+3^3=0$, $(x+3)(x^2-3x+9)=0$

$\therefore x=-3, \dfrac{3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

합 : $-3+\dfrac{3+3\sqrt{3}i}{2}+\dfrac{3-3\sqrt{3}i}{2}=0$

해설

$x^3+27=0$에서 x^2의 계수가 0이므로 근과 계수와의 관계에 의해 세 근의 합은 0

2. 방정식 $(x-1)(x^2-x-2)=0$의 모든 근의 합을 구하면?

① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

해설

$(x-1)(x-2)(x+1)=0$

$\therefore\ x=-1, 1, 2$

$\therefore\ -1+1+2=2$

3. 다음 방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$x^4 = 16$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^4 - 16 = 0$ 에서

$(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$

$(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) = 0$

$\therefore\ x = \pm 2$ 또는 $x = \pm 2i$

$\therefore$ 모든 해의 합은 $(-2) + 2 + (-2i) + 2i = 0$

4. 다음 연립방정식의 해를 구하면?

$$\begin{cases} 0.6x + 0.5y = 2.8 & \cdots ㉠ \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = 2 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

① $(2, 3)$　② $(-2, 3)$　③ $(3, 2)$
④ $(3, -2)$　⑤ $(-3, -2)$

해설
㉠, ㉡의 양변에 각각 10, 6을 곱하면

$$\begin{cases} 6x + 5y = 28 & \cdots\cdots ㉢ \\ 2x + 3y = 12 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$$

㉢ − ㉣×3을 하면 $-4y = -8$
$\therefore$ $y = 2$를 ㉣ 대입하면 $x = 3$
$\therefore$ $x = 3,\ y = 2$

5. 연립방정식 $ax+by=8$, $2ax-by=-2$의 근이 $x=1$, $y=2$일 때, a, b의 값은?

① $a=-2$, $b=-3$
② $a=3$, $b=2$
③ $a=2$, $b=-3$
④ $a=2$, $b=3$
⑤ $a=-3$, $b=-2$

해설

$ax+by=8$, $2ax-by=-2$

근이 $x=1, y=2$이므로

$$\begin{cases} a+2b=8 \\ 2a-2b=-2 \end{cases}$$

$\therefore\ a=2, b=3$

6. 다음 방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$에서

$x^2 = t$로 놓으면

$t^2 - 13t + 36 = 0$, $(t-4)(t-9) = 0$

$\therefore\ t = 4$ 또는 $t = 9$

(i) $t = 4$일 때, $x^2 = 4$

$\therefore\ x = \pm 2$

(ii) $t = 9$일 때, $x^2 = 9$

$\therefore\ x = \pm 3$

따라서 모든 해의 합은

$(-2) + 2 + (-3) + 3 = 0$

7. 삼차방정식 $2x^3-7x^2+11x+13=0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, 다음 (가), (나), (다)에 알맞은 값을 차례로 쓴 것은?

(가) $\alpha+\beta+\gamma$
(나) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$
(다) $\alpha\beta\gamma$

① $\frac{7}{2}$, $\frac{11}{2}$, $-\frac{13}{2}$　② $-\frac{7}{2}$, $\frac{13}{2}$, $\frac{11}{2}$　③ $\frac{13}{2}$, $\frac{7}{2}$, $-\frac{11}{2}$
④ $\frac{11}{2}$, $-\frac{13}{2}$, $\frac{7}{2}$　⑤ $\frac{7}{2}$, $-\frac{11}{2}$, $\frac{13}{2}$

해설

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0(a\neq 0)$의 세 근을 α, β, γ라 하면

$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$

$\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$

8. 삼차방정식 $x^3-5x^2+ax+b=0$의 한 근이 $1+\sqrt{2}$일 때, 다른 두 근을 구하면? (단, a, b는 유리수)

① $1-\sqrt{2}$, 2　　② $-1+\sqrt{2}$, -3　　③ $1-\sqrt{2}$, 3

④ $1-\sqrt{2}$, -3　　⑤ $-1+\sqrt{2}$, 3

해설

한 근이 $1+\sqrt{2}$이면 다른 한 근은 $1-\sqrt{2}$이다.
삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해 세근의 합은 5이므로
$\therefore\ 1+\sqrt{2}+(1-\sqrt{2})+\alpha=5,\quad \alpha=3$
$\therefore$ 다른 두 근은 $3, 1-\sqrt{2}$

9. 연립방정식 $\begin{cases} y = x+1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ 의 해를

$x=\alpha$,$y=\beta$라 할 때, $\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

$\begin{cases} y = x+1 & \cdots ㉠ \\ x^2+y^2=5 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 ㉡에 대입하면

$x^2+(x+1)^2=5$, $2x^2+2x-4=0$,

$2(x+2)(x-1)=0$

$\therefore\ x=1,\ -2$

$x=1$일 때, $y=2$,

$x=-2$일 때, $y=-1$

$\therefore\ \alpha=1, \beta=2$ 또는 $\alpha=-2$, $\beta=-1$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2-\alpha\beta=3$

10. 연립방정식 $\begin{cases} x^2-y^2=2 \\ x-y=1 \end{cases}$ 의 해를 순서쌍 (x, y)으로 나타내면?

① $(2, 1)$ ② $(\sqrt{2}+1, \sqrt{2})$ ③ $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

④ $(\sqrt{3}, 1)$ ⑤ $\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$

해설

$\begin{cases} x^2-y^2=2 \cdots ㉠ \\ x-y=1 \cdots ㉡ \end{cases}$

㉡을 $y=x-1$로 변형하여

㉠에 대입하면

$x^2-(x-1)^2=x^2-x^2+2x-1=2$

$2x=3$

$\therefore\ x=\frac{3}{2},\ y=\frac{1}{2}$

11. 연립방정식 $\begin{cases} x-2y=1 \\ xy-y^2=6 \end{cases}$ 의 해를 구하면 $x=p,\ y=q$ 또는 $x=r,\ y=s$ 이다. $p+q+r+s$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$\begin{cases} x-2y=1 & \cdots ㉠ \\ xy-y^2=6 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x=2y+1 \quad \cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하여 정리하면

$y^2+y-6=0(y-2)(y+3)=0$

$\therefore\ y=2,\ -3$

$y=2,\ y=-3$을 ㉢에 대입하면

각각 $x=5,\ x=-5$

$\therefore\ x=5,\ y=2$ 또는 $x=-5,\ y=-3$

12. $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ 에서 xy의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$\begin{cases} x-y=1 & \cdots ㉠ \\ x^2+y^2=5 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x=y+1$을 ㉡에 대입하면,
$(y+1)^2+y^2=5$
$y^2+y-2=0$
$(y+2)(y-1)=0$
$\therefore\ y=-2$ 또는 $y=1$
$y=-2$를 ㉠에 대입하면 $x=-1$
$y=1$을 ㉡에 대입하면 $x=2$
$\therefore\ xy=2$

13. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 12 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y에 대하여 $x+y$ 값이 될 수 <u>없는</u> 것은?

① $3\sqrt{2}$　② 4　③ $-3\sqrt{2}$
④ -4　⑤ $4\sqrt{2}$

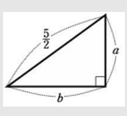
해설

$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$
$(x-y)(x-2y)$
$\Rightarrow \quad (x-y)(x-2y) = 0$
$\Rightarrow \quad x = y$ 또는 $x = 2y$
ⅰ) $x = y$
$x^2 + 2y^2 = 3x^2 = 12$
$x = \pm 2 \quad \Rightarrow \quad y = \pm 2$
ⅱ) $x = 2y$
$x^2 + 2y^2 = 6y^2 = 12$
$y = \pm\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2\sqrt{2}$
$x + y = (4, -4, 3\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$

14. 빗변의 길이가 $\frac{5}{2}$ 인 직각 삼각형의 넓이가 $\frac{3}{2}$ 일 때, 빗변이 아닌 두 변의 길이의 합은?

① $\frac{\sqrt{37}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{34}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{31}}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{7}{2}$

해설



직각을 낀 두 변의 길이를 각각 a, b 라 하면넓이는

$\frac{1}{2}ab = \frac{3}{2} \quad \cdots ①$

$a^2 + b^2 = \frac{25}{4} \quad \cdots ②$

①, ②식에서

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

$= \frac{25}{4} + 6 = \frac{49}{4}$

$\therefore\ a + b = \frac{7}{2}$

15. 방정식 $2x^2 + y^2 + 2xy - 4x + 4 = 0$ 을 만족시키는 실수 $x,\ y$ 의 곱 xy 를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -4

해설

$2x^2 + y^2 + 2xy - 4x + 4 = 0$ 에서
$(x^2 + 2xy + y^2) + (x^2 - 4x + 4) = 0$
$(x + y)^2 + (x - 2)^2 = 0$
$x,\ y$ 가 실수이므로 $x + y = 0,\ x - 2 = 0$
$\therefore\ x = 2,\ y = -2$
$\therefore\ xy = -4$

16. 이차방정식 $2x^2-5x+k=0$ 의 근이 유리수가 되는 k의 최대 정수값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

근이 유리수이므로, 판별식D ≥ 0 이어야 한다.

$D=25-8k\geq 0$ 곧, $k\leq \frac{25}{8}$ 이어야 한다.

k 는 정수이므로 $k=3,\ 2,\ 1,\ \cdots$ 이고,
이 중 $D\geq 0$ 조건을 만족하는 최대 정수는 $k=3$ 이다.

17. 방정식 $xy + 2x = 3y + 10$을 만족하는 양의 정수가 $x = \alpha,\ y = \beta$일 때, $\alpha\beta$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

주어진 식을 변형하면

$xy + 2x - 3y = 10,\ xy + 2x - 3y - 6 = 4,$

$(x - 3)(y + 2) = 4$

$y + 2 \geq 3$이므로 두 자연수의 곱이 4가 되는 경우는

$x - 3 = 1,\ y + 2 = 4$

$\therefore\ x = 4,\ y = 2$

18. 이차방정식 $x^2 - ax + a + 2 = 0$의 두 근이 모두 정수가 되게 하는 모든 상수 a에 대한 설명 중 옳은 것은?

① a는 -10 이상 -2 이하이다.

② a는 -2 이상 6 이하이다.

③ a는 6 이상이다.

④ a는 0 이하이다.

⑤ a는 0 이상 8 이하이다.

해설

두 정수근을 α, β라 하면 (단, $\beta \geq \alpha$)
$\alpha + \beta = a,\ \alpha\beta = a + 2$
이 두 식에서 a를 소거하면
$\alpha\beta - \alpha - \beta = 2,\ (\alpha - 1)(\beta - 1) = 3$
$\alpha - 1, \beta - 1$이 정수이므로
$\therefore\ \alpha = 2,\ \beta = 4$ 또는 $\alpha = -2,\ \beta = 0$
$\therefore\ a = 6,\ -2$

19. 대학수학능력시험 수리탐구 의 문항 수는 30개이고 배점은 80점이다. 문항별 배점은 2점, 3점, 4점의 세 종류이다. 각 배점 종류별 문항이 적어도 한 문항씩 포함되도록 하려면 2점짜리 문항은 최소 몇 문항이어야 하는가?

① 9　　② 10　　③ 11　　④ 12　　⑤ 13

해설

2점문항 개수를 x, 3점문항을 y,
4점문항을 z라 하자

$2x + 3y + 4z = 80 \quad \cdots \quad$ ㉠

$x + y + z = 30 \quad \cdots \quad$ ㉡

㉠$-4\times$㉡ $\Rightarrow$ $y = 40 - 2x$

㉠$-3\times$㉡ $\Rightarrow$ $z = x - 10$

$\therefore$ $x = 10$이면 $z = 0$

$\Leftarrow$ 조건이 성립하지 않음

$\therefore$ $x \geq 11$, 최소 11문항

20. 다음 방정식의 실근의 합을 구하여라.

$$x^4+5x^3-12x^2+5x+1=0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

$x=0$을 대입하면

$1=0$이 되어 모순이므로 $x\neq0$이다.

따라서, 주어진 식의 양변을

x^2으로 나누면

$x^2+5x-12+\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$

$\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-12=0$

$\therefore\ \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-14=0$

여기서 $x+\dfrac{1}{x}=X$로 놓으면

$X^2+5X-14=0$, $(X+7)(X-2)=0$

$\therefore\ X=-7$ 또는 $X=2$

(ⅰ) $X=-7$일 때,

$x+\dfrac{1}{x}=-7$에서

$x^2+7x+1=0$

$\therefore\ \dfrac{-7\pm3\sqrt{5}}{2}$

(ⅱ) $X=2$일 때,

$x+\dfrac{1}{x}=2$에서

$x^2-2x+1=0$, $(x-1)^2=0$

$\therefore\ x=1$

(ⅰ), (ⅱ)로부터

$x=1$(중근) 또는 $x=\dfrac{-7\pm3\sqrt{5}}{2}$

따라서, 모든 근의 합은

$1+\dfrac{-7+3\sqrt{5}}{2}+\dfrac{-7-3\sqrt{5}}{2}=-6$이다.

21. $x^4 + 2x^3 + (a-1)x^2 - 2x - a = 0$의 네 근이 모두 실수가 되도록 실수 a의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^4 + 2x^3 + (a-1)x^2 - 2x - a = 0$에서 $x = 1, x = -1$일 때 성립하므로
인수정리와 조립제법을 이용하면
$(좌변) = (x-1)(x+1)(x^2 + 2x + a) = 0$
따라서 모두 실근이 되려면
$x^2 + 2x + a = 0$의 $\frac{D}{4} \geq 0$이어야 하므로
$1^2 - 1 \cdot a \geq 0 \quad \therefore a \leq 1$
따라서 a의 최댓값은 1이다.

22. $x^3+2x^2+3x+1=0$의 세 근을 α,β,γ라 한다. $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma}$을 근으로 하는 삼차방정식이 $x^3+ax^2+bx+c=0$일 때, abc의 값을 구하면?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$x^3+2x^2+3x+1=0$의
세 근이 α,β,γ이므로
$\alpha+\beta+\gamma=-2,$
$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3,$
$\alpha\beta\gamma=-1$
$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=-3,$$
$$\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=2,$$
$$\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=-1$$
따라서 $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma}$를 세 근으로 하는
삼차항의 계수가 1인 방정식은
$x^3+3x^2+2x+1=0$
$\Leftrightarrow x^3+ax^2+bx+c=0$
$\therefore a=3, b=2, c=1$

해설

$x^3+2x^2+3x+1=0\cdots\cdots$ ①
$x=\frac{1}{X}$로 놓으면
$$\left(\frac{1}{X}\right)^3+2\cdot\left(\frac{1}{X}\right)^2+3\cdot\left(\frac{1}{X}\right)+1=0$$
$\therefore\ X^3+3X^2+2X+1=0\cdots\cdots$ ②
①의 세 근이 α,β,γ이므로
②의 세 근은 $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma}$이다.
$\therefore$구하는 방정식은
$X^3+3X^2+2X+1=0$에서
$abc=3\cdot2\cdot1=6$

23. $x^3 = 1$의 한 허근을 ω라 할 때, 다음<보기>중 옳은 것의 개수는?

보기

㉠ $\omega^3 = 1$	㉡ $\omega^2 + \omega + 1 = 0$
㉢ $\overline{\omega} = \omega^2 = \frac{1}{\omega}$	㉣ $\omega + \overline{\omega} = 1$
㉤ $\omega\overline{\omega} = 1$	㉥ $\omega^{2005} + \frac{1}{\omega^{2005}} = -1$

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 5개

해설

$x^3 = 1 \Rightarrow \omega^3 = 1 \cdots$ ㉠(○)

$x^3 - 1 = 0 \Rightarrow (x-1)(x^2 + x + 1) = 0$

$\Rightarrow \omega^2 + \omega + 1 = 0 \cdots$ ㉡(○)

∴근과 계수와의 관계에 의해

$\omega + \overline{\omega} = -1, \omega\overline{\omega} = 1 \cdots$ ㉣(×), ㉤(○)

$\omega + \overline{\omega} = -1$이므로

$\omega^2 + \omega + 1 = \omega^2 - 1 - \overline{\omega} + 1 = 0$

$\Rightarrow \omega^2 = \overline{\omega} \cdots$ ㉢(○)

$$\omega^{2005} + \frac{1}{\omega^{2005}}$$

$$= (\omega^3)^{668}\omega + \frac{1}{(\omega^3)^{668}\omega}$$

$$= \omega + \frac{1}{\omega} = -1$$

$(\because \omega^2 + \omega + 1 = 0) \cdots$ ㉥(○)

24. 연립방정식 $\begin{cases} xy + x + y = 5 \\ x^2 + xy + y^2 = 7 \end{cases}$ 을 만족하는 순서쌍 $(x,\ y)$ 의 개수는?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$x + y = u,\ xy = v$ 라 하면

$$\begin{cases} u + v = 5 & \cdots ㉠ \\ u^2 - v = 7 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$u^2 - (5 - u) = 7$

$u^2 + u - 12 = 0$

$(u + 4)(u - 3) = 0$

$\therefore\ u = -4$ 또는 $u = 3$

(ⅰ) $u = -4,\ v = 9$, 즉 $x + y = -4,\ xy = 9$ 일 때, $x,\ y$ 는 $t^2 + 4t + 9 = 0$ 의 두 근이므로 $t = -2 \pm \sqrt{5}i$

따라서, $x = -2 \pm \sqrt{5}i,\ y = -2 \mp \sqrt{5}i$ 이므로 (복부호 동순)

$(-2 + \sqrt{5}i,\ -2 - \sqrt{5}i),\ (-2 - \sqrt{5}i,\ -2 + \sqrt{5}i)$

(ⅱ) $u = 3,\ v = 2$, 즉 $x + y = 3,\ xy = 2$ 일때, $x,\ y$ 는 $t^2 - 3t + 2 = 0$ 의 두 근이므로

$(t - 1)(t - 2) = 0$

$\therefore\ t = 1$ 또는 $t = 2$

따라서, $x = 1,\ y = 2$ 또는 $x = 2,\ y = 1$ 이므로 $(1,\ 2),\ (2,\ 1)$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 순서쌍의 개수는 4개이다

25. 세 개의 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$, $bx^2+cx+a=0$, $cx^2+ax+b=0$ 이 오직 하나의 공통 실근을 가질 때, $a+b+c$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

공통 실근을 α라 하면
$a\alpha^2+b\alpha+c=0 \ \cdots(\text{i})$
$b\alpha^2+c\alpha+a=0 \ \cdots(\text{ii})$
$c\alpha^2+a\alpha+b=0 \ \cdots(\text{iii})$
(i)+(ii)+(iii) 하면
$(a+b+c)(\alpha^2+\alpha+1)=0$
α가 실수일 때 $\alpha^2+\alpha+1>0$
$\therefore \ a+b+c=0$