1. $4x^2+4y^2-20x+9=0$의 중심의 좌표 C와 반지름 r을 구하면?

① $C\left(-\frac{5}{2},\ 0\right)$, $r=2$
② $C\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$, $r=4$
③ $C\left(0,\ \frac{5}{2}\right)$, $r=4$
④ $C\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$, $r=2$
⑤ $C\left(0,\ \frac{5}{2}\right)$, $r=2$

해설

$4x^2+4y^2-20x+9=0$를 정리하면

$x^2+y^2-5x+\frac{9}{4}=0$

$\therefore\ \left(x-\frac{5}{2}\right)^2+y^2=4$

따라서 중심의 좌표는 $\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$이며

반지름은 2이다.

2. 두 원 $x^2+y^2=9, (x-4)^2+(y-3)^2=4$ 의 교점의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 1 개

해설

A : $x^2+y^2=9$
중심 $(0,\ 0)$, 반지름의 길이 3
B : $(x-4)^2+(y-3)^2=4$
중심 $(4,\ 3)$, 반지름의 길이 2
두 원의 중심 사이의 거리를 구하면, $\sqrt{4^2+3^2}=5$
$\therefore$ 중심 사이의 거리는 두 원의 반지름의 합과
같다. $\Rightarrow$ 두 원은 외접한다, 교점의 개수 1 개

3. 두 원 O_1, O_2 의 중심거리가 $d = 7$ 이고, 그 각각 반지름의 길이 r_1, r_2 가 2, 5 일 때, 두 원은 어떤 위치관계에 있는가?

① 외접한다. ② 내접한다.
③ 두 점에서 만난다. ④ 만나지 않는다.
⑤ 네 점에서 만난다.

해설
$d = r_1 + r_2$ 이므로 두 원은 외접한다.

4. 두 원 $x^2+y^2-x+2y-3=0$, $2x^2+2y^2-6x+ay-2=0$ 의 공통현이 직선 $y=-3x-1$ 과 직교할 때, 상수 a 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

해설

두 원의 공통현의 방정식은
$2(x^2+y^2-x+2y-3)-(2x^2+2y^2-6x+ay-2)=0$
즉, $4x+(4-a)y-4=0 \cdots\cdots$ ㉠
직선 ㉠과 직선 $y=-3x-1$ 은 직교하므로
$\frac{-4}{4-a}\times(-3)=-1$ 에서 $a=16$

5. 원 $x^2+y^2=20$ 위의 점 $(4,-2)$ 에서의 접선의 방정식이 $y=ax+b$ 일 때, 상수 a, b 의 합 $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -8

해설

원 $x^2+y^2=20$ 위의 점 $(4,-2)$ 에서의 접선의 방정식은
$4x-2y=20$ $\therefore$ $y=2x-10$
따라서, $a=2$, $b=-10$ $\therefore$ $a+b=2-10=-8$

6. 다음의 x, y 에 대한 이차방정식 중 원의 방정식을 나타내지 <u>않은</u> 것은?

① $x^2+y^2+x+2y+1=0$ ② $x^2+y^2+x+2y+2=0$
③ $x^2+y^2+2x+y+1=0$ ④ $x^2+y^2-2x+4y+3=0$
⑤ $x^2+y^2-2x+4y+4=0$

해설

① $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2=\frac{1}{4}$
② $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2=-\frac{3}{4}$
③ $(x+1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$
④ $(x-1)^2+(y+2)^2=2$
⑤ $(x-1)^2+(y+2)^2=1$

7. 두 점 $(1,\ 2)$, $(2,\ 1)$을 지나고, x축에 접하는 원은 두 개있다. 두 원의 중심 사이의 거리는?

① 4 ② 5 ③ $4\sqrt{2}$ ④ 6 ⑤ $4\sqrt{3}$

해설

그 원을 $(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$ 이라 하면
$(1,\ 2)$, $(2,\ 1)$을 지나므로
$(1-a)^2+(2-b)^2=b^2$, $(2-a)^2+(1-b)^2=b^2$
$1-2a+a^2+4-4b=0\cdots$㉠
$4-4a+a^2+1-2b=0\cdots$㉡
㉡$\times 2-$㉠
$a^2-6a+5=0$, $(a-1)(a-5)=0$
$\therefore a=1$ 또는 $a=5$
ⅰ) $a=1$ 이면 ① 에서 $b=1$
ⅱ) $a=5$ 이면 ① 에서 $b=5$
$\therefore$ 두 원의 중심은 $(1,1)$, $(5,5)$ 이다.
중심거리
$=\sqrt{(5-1)^2+(5-1)^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

8. 중심이 직선 $y = x + 3\ (x > 0\ )$ 위에 있고, 점 $(1,\ 2)$를 지나며 또 x 축에 접하는 원의 반지름은?

① 2　　② 5　　③ 10　　④ 12　　⑤ 15

해설

중심을 $(a,\ a+3)$ 이라 하면 반지름이
$a+3$ 이므로 원의 방정식은
$(x-a)^2 + (y-a-3)^2 = (a+3)^2 \ \cdots\cdots$ ㉠
㉠이 점 $(1,\ 2)$ 를 지나므로
$(1-a)^2 + (2-a-3)^2 = (a+3)^2 \Rightarrow\ a^2 - 6a - 7 = 0$
$\Rightarrow\ (a+1)(a-7) = 0$
$\Rightarrow\ a = 7 \quad (\because\ x > 0\ \Rightarrow\ a > 0)$
$\therefore$ 반지름 : $a + 3 = 7 + 3 = 10$

9. 점 (2, 1) 을 지나고 x 축, y 축에 동시에 접하는 원의 방정식의 반지름의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

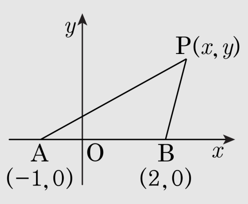
해설

원이 점 (2, 1) 을 지나고 x 축, y 축에 접하면
제 1 사분면에 위치하므로 반지름이 r 이면
중심이 (r, r) 이다.
$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$ 이고
또한 (2, 1) 을 지나므로
$(2-r)^2+(1-r)^2=r^2$,
$(r-1)(r-5)=0$
$\therefore$ $r=1$ 또는 5
$\therefore$ $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 또는 $(x-5)^2+(y-5)^2=5^2$
$\therefore 1+5=6$

10. 두 점 A$(-1,\ 0)$, B$(2,\ 0)$ 으로부터 거리의 비가 $2:1$ 인 점 P 의 자취는 어떤 원을 나타낸다. 이 때, 이 원의 반지름의 길이는?

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ 4

해설



조건을 만족시키는 점 P 의 좌표를 $P(x, y)$ 라 하면

$\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$

$2\overline{BP} = \overline{AP}$

$\therefore\ 4\overline{BP}^2 = \overline{AP}^2$

그런데 $\overline{AP} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$

$\overline{BP} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$

$4\left\{(x-2)^2 + y^2\right\} = \left\{(x+1)^2 + y^2\right\}$

정리하면 $(x-3)^2 + y^2 = 4$

따라서 원의 반지름은 2 이다.

11. 다음 원 $x^2+y^2=9$와 직선 $y=x+5$ 의 교점의 개수를 구하여라.

▶ 답： ______ 개

▷ 정답： 0개

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리를 구해보면,

$\frac{|5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}>3$

반지름보다 크므로 원과 직선은 만나지 않는다.

12. 점 A$(-2,\ 3)$ 에서 원 $x^2+y^2-2x+4y-4=0$에 그은 접선의 접점을 B라 할 때, AB의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

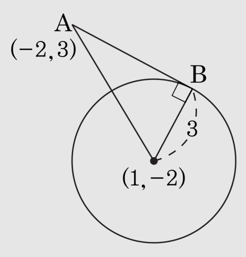
해설

$x^2+y^2-2x+4y-4=0$

$(x-1)^2+(y+2)^2=3^2$

원의 중심은 $(1,\ -2)$, 반지름은 3이므로

$\overline{AB}=\sqrt{(3^2+(-5)^2)-3^2}=5$



13. 직선 $x+3y-k=0$이 원 $(x-5)^2+y^2=3$의 넓이를 이등분할 때, k의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

직선이 원의 넓이를 이등분하려면 직선이 원의 중심을 지나면 된다.
따라서 원의 중심 $(5,\ 0)$이 직선 위에 있으므로 $5-k=0$
$\therefore\ k=5$

14. $x^2 + y^2 = 9$ 에 접하고 기울기가 2 인 직선의 방정식을 구하면?

① $y = x \pm \sqrt{5}$ ② $y = 2x \pm 3\sqrt{5}$ ③ $y = 4x \pm 2\sqrt{5}$
④ $y = 5x \pm 5\sqrt{5}$ ⑤ $y = x \pm 2\sqrt{5}$

해설
구하는 접선의 방정식은
$y = 2x \pm 3\sqrt{1 + 2^2} \quad \leftarrow \quad m = 2, r = 3$
$\therefore y = 2x \pm 3\sqrt{5}$

15. 두 원 $x^2+y^2-4x=0$, $x^2+y^2-6x-2y+8=0$ 의 두 교점과 점$(1,\ 0)$을 지나는 원의
방정식을 바르게 구한 것은?

① $x^2+y^2-8x-y-4=0$

② $x^2+y^2-8x-4y+16=0$

③ $x^2+y^2-5x-y+16=0$

④ $x^2+y^2-5x-4y+16=0$

⑤ $x^2+y^2-5x-y+4=0$

해설

문제에서 주어진 두 원의 교점을
지나는 임의의 원
또는 직선의 방정식은
$(x^2+y^2-4x)m+(x^2+y^2-6x-2y+8)=0$ 이다.
위 방정식이 나타내는 원이 점 $(1, 0)$ 을 지나므로
$x=1$, $y=0$ 을 대입하면
$-3m+3=0$
$\therefore m=1$
$(x^2+y^2-4x)+(x^2+y^2-6x-2y+8)=0$
$2x^2+2y^2-10x-2y+8=0$,
$x^2+y^2-5x-y+4=0$

16. 두 원 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$, $(x-5)^2+(y-4)^2=36$의 공통외접선의 개수는?

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 0개

해설

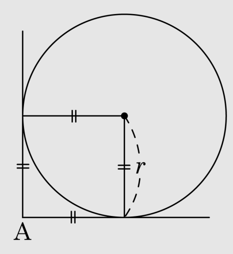
두 원의 중심거리는
$\sqrt{(5-1)^2+(4-2)^2}=\sqrt{20}$
두 원의 반지름의 길이의 합이 8, 차가 4로
$4<\sqrt{20}<8$ 이므로
두 원은 서로 두 점에서 만난다.
따라서 공통외접선 2개를 가진다.

17. 좌표평면 위에 원 $(x-5)^2+(y-4)^2=r^2$과 원 밖의 점 A$(2,\ 1)$이 있다. 점 A 에서 원에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, 반지름의 길이 r의 값은?

① 3　　② $\sqrt{10}$　　③ $\sqrt{11}$　　④ $\sqrt{13}$　　⑤ $\sqrt{14}$

해설

두 접선이 서로 수직이면 그림처럼 한 변이 r인 정사각형이 된다.
따라서 원 중심에서 A 까지의 거리는 $\sqrt{2}r$ 이 된다.



$\therefore\ \sqrt{(5-2)^2+(4-1)^2}=\sqrt{2}r$

$\therefore\ r=3$

18. 좌표평면 위의 두 점 A$(8, 0)$, B$(0, 6)$ 에 대하여 삼각형 OAB 의 외접원의 방정식이 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ 일 때, 세 상수 a, b, c 의 곱 abc 의 값을 구하여라. (단, O 는 원점)

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$\angle$AOB $= 90°$ 이므로 선분 AB 는 외접원의 지름이다.
$\overline{AB} = 10$ 이고 원의 중심은 C$(4, 3)$ 이므로 원의 방정식은 $(x-4)^2+(y-3)^2=5^2$
이 식을 정리하면 $x^2+y^2-8x-6y=0$
$a=-8,\ b=-6,\ c=0$
$\therefore abc=0$

19. 점 $P(a, 0)$에서 원 $(x-3)^2+(y-2)^2=4$에 그은 접선의 길이가 4일 때, 점 P의 좌표를 모두 구하면?

① $(1, 0)$, $(7, 0)$ ② $(-1, 0)$, $(7, 0)$ ③ $(1, 0)$, $(-7, 0)$
④ $(-1, 0)$, $(5, 0)$ ⑤ $(1, 0)$, $(-5, 0)$

해설

원의 중심을 $C(3, 2)$, 접점을 Q라 하면
$\overline{CP}=\sqrt{(a-3)^2+2^2}$
CPQ는 직각삼각형이므로
$(a-3)^2+4=2^2+4^2$
$a^2-6a-7=0$
$(a+1)(a-7)=0$
$\therefore a=-1$ 또는 $a=7$
따라서 구하는 점 P의 좌표는 $(-1, 0)$, $(7, 0)$이다.

20. 원 $x^2+y^2=\frac{13}{4}$ 과 함수 $y=\frac{3}{2x}$ 의 그래프가 만나는 모든 교점의 x 좌표를 a, b, c ,d 라 할 때, $4abcd$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$y=\frac{3}{2x}$ 을 $x^2+y^2=\frac{13}{4}$ 에 대입하면

$x^2+\frac{9}{4x^2}=\frac{13}{4}$

$x\neq 0$ 이므로 양변에 $4x^2$ 을 곱하고 정리하면

$4x^4-13x^2+9=(x^2-1)(4x^2-9)=0$

$\therefore\ x=\pm 1,\ \pm\frac{3}{2}$

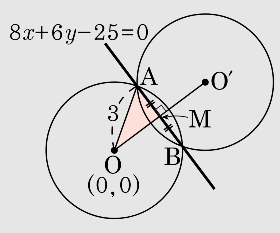
따라서 구하는 답은

$4\times(-1)\times 1\times\frac{3}{2}\times\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}\times 4=9$

21. 두 원 $x^2+y^2=9, x^2+y^2-8x-6y+16=0$ 의 두 교점 사이의 거리를 구하면?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{10}$ ④ $\sqrt{11}$ ⑤ $\sqrt{13}$

해설



두 원의 교점을 이은 선분이 공통현이다.
두 원의 공통현의 방정식은
$(x^2+y^2-9)-(x^2+y^2-8x-6y+16)=0$
$\therefore 8x+6y-25=0$
이때, 다음 그림과 같이 이 두 원의 교점을 A, B라 하고 공통현 AB의 중점을 M이라고 하면
$\overline{OO'}$ 은 $\overline{AB}$ 를 수직이등분하므로 $\overline{AB}=2\overline{AM}=2\sqrt{3^2-\overline{OM}^2}\cdots\cdots$ ㉠
그런데 $\overline{OM}$ 은 원점 O에서 직선 $8x+6y-25=0$ 까지의 거리이므로
$\overline{OM}=\dfrac{|-25|}{\sqrt{8^2+6^2}}=\dfrac{5}{2}\cdots\cdots$ ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면 구하는 두 교점 사이의 거리는
$\overline{AB}=2\overline{AM}=2\sqrt{3^2-\left(\dfrac{5}{2}\right)^2}=2\cdot\dfrac{\sqrt{11}}{2}=\sqrt{11}$

22. 두 원 $(x-a)^2+(y-1)^2=1$, $(x-2)^2+(y-a)^2=4$이 직교할 때 a의 값의 합은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

두 원의 중심이 각각 $(a,\ 1)$, $(2,\ a)$이므로
두 원의 중심 사이의 거리는 $\sqrt{(a-2)^2+(1-a)^2}$이다.
두 원의 반지름은 각각 1, 2이므로
직교하기 위한 조건은
$(a-2)^2+(1-a)^2=1^2+2^2$
$\therefore\ a^2-3a=0$
근과 계수와의 관계로부터 두 근의 합은 3

23. 원 $x^2 + y^2 - 6ax + 2ay + 20a - 10 = 0$ 은 정수 a 의 값에 관계없이 정점을 지난다. 그 정점을 구하면?

① $(2,\ -1)$ ② $(3,\ -2)$ ③ $(2,\ -2)$

④ $(-1,\ -2)$ ⑤ $(3,\ -1)$

해설

a 에 대한 항등식 꼴로 나타내면

$a(-6x + 2y + 20) + (x^2 + y^2 - 10) = 0$

$$\begin{cases} -6x + 2y + 20 = 0 \rightarrow y = 3x - 10 \cdots ① \\ x^2 + y^2 = 10 \cdots ② \end{cases}$$

①, ②를 연립하면

$x^2 + (3x - 10)^2 = 10$

$x^2 - 6x + 9 = 0 \rightarrow (x - 3)^2 = 0$

$\therefore\ x = 3,\ y = -1$

24. 두 원 $x^2+y^2=1$, $x^2+(y-3)^2=4$ 의 공통접선의 방정식이 $y=mx+n$ 일 때, m^2+n^2 의 값은?(단, $m \neq 0$)

① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19

해설

원 $x^2+y^2=1$ 의 중심 $(0,\ 0)$ 에서
직선 $y=mx+n$,
즉 $mx-y+n=0$ 에 이르는 거리가 1 이므로

$$\frac{|n|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$$

$\therefore\ m^2=n^2-1\ \cdots$ ㉠
원 $x^2+(y-3)^2=4$ 의 중심 $(0,\ 3)$ 에서
직선 $mx-y+n=0$ 에 이르는 거리가 2 이므로

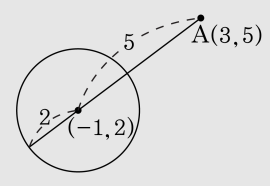
$$\frac{|-3+n|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$$

$\therefore\ n^2-6n+9=4m^2+4\ \cdots$ ㉡
㉠ 을 ㉡ 에 대입하면,
$n^2-6n+9=4(n^2-1)+4,\ 3n^2+6n-9=0$
$n^2+2n-3=0,\ (n+3)(n-1)=0$
$\therefore\ n=-3$ 또는 $n=1$
이 때, $n=1$ 이면 $m=0$ 이 되므로 $n=-3$
$n=-3$ 을 ㉠ 에 대입하면 $m^2=8$
$\therefore\ m^2+n^2=8+9=17$

25. 점 A(3, 5) 와 원 $(x+1)^2+(y-2)^2=4$ 위의 점 P 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}$ 의 최솟값과 최댓값의 합은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설



원 $(x+1)^2+(y-2)^2=4$ 의 중심이 $(-1,\ 2)$ 이므로
점 A 와 원의 중심 사이의 거리는
$\sqrt{(-1-3)^2+(2-5)^2}=5$
이 때, 원의 반지름의 길이는 2 이므로
($\overline{\mathrm{AP}}$ 의 최댓값)$=5+$ (반지름의 길이)$=5+2=7$
($\overline{\mathrm{AP}}$ 의 최솟값)$=5-$ (반지름의 길이)$=5-2=3$
따라서 구하는 합은 $7+3=10$