1. 점 $(2,\ 3)$ 을 지나고, 기울기가 -2 인 직선의 방정식은?

① $y = 2x + 7$ ② $y = 2x - 7$ ③ $y = -2x + 7$
④ $y = -2x - 7$ ⑤ $y = -7x + 2$

해설

점$(x_1,\ y_1)$ 을 지나고, 기울기가 m 인 직선의 방정식은
$y - y_1 = m(x - x_1)$
점 $(x_1,\ y_1)$ 을 지나고, 기울기가 m 인 직선의 방정식은
$y - y_1 = m(x - x_1)$ 이므로
$y - 3 = -2(x - 2)$, 즉 $y = -2x + 7$

2. 좌표평면 위의 점$(2,\ 3)$을 지나는 직선 l 이 두 점 $A(-4,\ 1)$, $B(2,\ -2)$를 잇는 선분AB 를 $1\ :\ 2$ 로 내분할 때, 직선 l의 y절편은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ 2

해설

선분 $\overline{AB}$를 $1\ :\ 2$로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{1\cdot 2+2\cdot(-4)}{1+2},\ \frac{1\cdot(-2)+2\cdot 1}{1+2}\right)$$

$\therefore\ (-2,\ 0)$

직선 l은 두 점 $(2,\ 3)$, $(-2, 0)$을 지나므로

그 방정식은 $y=\frac{3}{4}(x+2)$

$\therefore\ y=\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}$

따라서 y 절편은 $\frac{3}{2}$ 이다.

3. 좌표평면에 두 점 $A(1, 3)$, $B(2, -1)$이 있다. 점 $C(m, 2)$에 대하여 $\overline{AC}+\overline{BC}$가 최소일 때의 상수 m의 값은?

① $\frac{5}{4}$ ② $-\frac{5}{4}$ ③ $\frac{7}{4}$ ④ $-\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{9}{4}$

해설

$\overline{AC}+\overline{BC}$가 최소인 경우는
세 점 A, B, C가 일직선 위에 있을 때이므로
직선 AB의 기울기와 BC의 기울기가 같다.
따라서 $\frac{-1-3}{2-1}=\frac{2-(-1)}{m-2}$
$\therefore m=\frac{5}{4}$

4. 두 직선 $ax+y+1=0$, $4x+by-1=0$이 서로 평행일 때, ab의 값은?

① -4 ② -3 ③ -1 ④ 3 ⑤ 4

해설

$ax+y+1=0 \cdots$ ㉠

$4x+by-1=0 \cdots$ ㉡

㉠ // ㉡ : $\dfrac{a}{4}=\dfrac{1}{b}\neq\dfrac{1}{-1}$

$\Rightarrow ab=4$

5. 직선 $(a-2)y = 3(a-1)x-1$ 이 실수 a 의 값에 관계없이 반드시 지나는 사분면은?

① 제 1 사분면

② 제 1 사분면 또는 제 2 사분면

③ 제 2 사분면

④ 제 3 사분면

⑤ 제 4 사분면

해설

주어진 식을 a 에 관하여 정리하면

$(3x-y)a-3x+2y-1=0$

따라서, $3x-y=0,\ -3x+2y-1=0$ 에서

$x=\frac{1}{3},\ y=1$

주어진 직선은 항상 제 1 사분면 위의 점 $\left(\frac{1}{3},\ 1\right)$ 을 지난다.

6. 직선 $y = -x + 1$ 의 기울기와 y 절편, x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 기울기 -1

▷ 정답 : y 절편 1

▷ 정답 : x축의 양의 방향 $135°$

해설

기울기 -1, y 절편 1,
x 축의 양의 방향과
이루는 각 $135°$

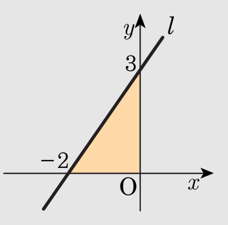
7. 직선 $3x-2y+6=0$이 x 축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$3x-2y+6=0$을 그래프에 도시해보면,



$\therefore$ 빗금 친 부분의 넓이 : $\frac{1}{2}\times2\times3=3$

8. $ac < 0,\ bc > 0$ 일 때, 일차함수 $ax + by + c = 0$ 이 나타내는 직선이 지나지 않는 사분면을 구하여라.

▶ 답: 사분면

▷ 정답: 제 2사분면

해설

$b \neq 0$ 이므로,

$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \cdots$ ㉠

$ac < 0,\ bc > 0$ 에서 $ac \cdot bc < 0$

$\therefore\ abc^2 < 0$ 즉, $ab < 0$

$ab < 0$ 에서 기울기 $-\frac{a}{b} > 0$

$bc > 0$ 에서 y 절편 $-\frac{c}{b} < 0$

따라서 ㉠은 제 2 사분면을 지나지 않는다.

9. 직선 $x+2y+3=0$ 과 수직이고 점 $(2,\ 0)$ 을 지나는 직선의 방정식을 구하면?

① $2x-y-4=0$ ② $x-2y-4=0$

③ $2x-3y-4=0$ ④ $3x-y-4=0$

⑤ $3x-2y-4=0$

해설

$y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$ 에 수직이므로, 기울기은 2

$(2,0)$ 을 지나므로,

$\Rightarrow\ y=2(x-2)$

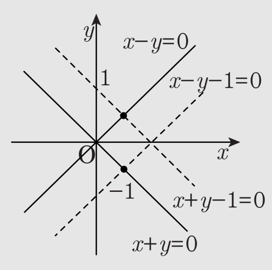
$\Rightarrow\ y=2x-4$

10. 다음 두 이차방정식 $x^2 - y^2 = 0$과 $x^2 - y^2 - 2x + 1 = 0$의 해의 개수는?

① 없다　　② 1 개　　③ 2 개
④ 4개　　⑤ 무수히 많다.

해설

$x^2 - y^2 = 0$ 에서 $(x + y)(x - y) = 0$
$\therefore x + y = 0$ 또는 $x - y = 0$
$x^2 - y^2 - 2x + 1 = 0$ 에서 $(x - 1)^2 - y^2 = 0$
$(x + y - 1)(x - y - 1) = 0$
$\therefore x + y - 1 = 0$ 또는 $x - y - 1 = 0$
따라서, 다음 그림과 같이 $x^2 - y^2 = 0$ 는
두 직선 $x + y = 0$, $x - y = 0$
$x^2 - y^2 - 2x + 1 = 0$ 는 두 직선 $x + y - 1 = 0$, $x - y = 0$
위의 점이므로 다음 그림에서
교점의 개수는 2 개



11. 두 직선 $y = 3x + 2$, $y = 4x - 1$ 의 교점을 지나는 직선 중 x 절편과 y 절편이 같은 직선을 구하면?

① $x + y - 14 = 0$　　② $-x + y - 14 = 0$
③ $x - y - 14 = 0$　　④ $x + y + 14 = 0$
⑤ $-x + y + 14 = 0$

해설

두 직선 $y = 3x + 2, y = 4x - 1$ 의
교점을 지나는 직선은
$(3x - y + 2) \cdot m + (4x - y - 1) = 0$
(m 은 상수) 로 나타낼 수 있다.
$\therefore (3m + 4)x - (m + 1)y + (2m - 1) = 0$
$\Leftrightarrow y = \frac{3m + 4}{m + 1}x + \frac{2m - 1}{m + 1}$
x 절편과 y 절편이 같으므로
이 직선의 기울기는 -1 이다.
따라서, $\frac{3m + 4}{m + 1} = -1$
$\therefore m = -\frac{5}{4}$
따라서, 구하는 직선의 방정식은 $x + y - 14 = 0$
(별해)
두 직선의 교점을 구하면 $3x + 2 = 4x - 1$ 에서
$x = 3,\ y = 11$
x 절편, y 절편이 같으면 기울기가 -1 이므로
$y - 11 = -1(x - 3)$
따라서, $y = -x + 14$

12. 원점에서 직선 $3x-4y-5=0$에 이르는 거리를 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

점과 직선 사이의 거리 구하는 공식을 이용하면,

$$\frac{|0\times3+0\times(-4)-5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$$

13. x축 위의 점 P로부터 직선 $4x+3y+2=0$까지의 거리가 2인 점은 두 개 있다. 이 때, 이 두 점 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

P의 좌표를 $(\alpha,\ 0)$이라 하면

P에서 직선까지의 거리가 2이므로

$$\frac{|4\cdot\alpha+3\cdot0+2|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2$$

$\therefore |4\alpha+2|=10$

$4\alpha+2=\pm10$

$\therefore \alpha=2,\ -3$

$\therefore$ 거리 l은 $l=2-(-3)=5$

14. 다음 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 구하여라.

$$(0, 0),\ (2, 6),\ (6, 3)$$

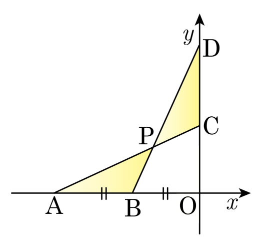
▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$\frac{1}{2}|2 \cdot 3 - 6 \cdot 6| = 15$

15. 다음 그림에서 점 B 가 선분 AO 의 중점이고, 사각형 PBOC 의 넓이는 어두운 두 삼각형 PAB, PCD 의 넓이의 합과 같다. 직선 BD 의 기울기가 3 일 때, 직선 AC 의 기울기는?



① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{4}{5}$
④ $\frac{5}{6}$ ⑤ $\frac{6}{7}$

해설

$\triangle ABP = \triangle BOP$ 이므로 $\triangle COP = \triangle CDP$
따라서, $\overline{CO} = \overline{CD}$, $\overline{BO} = k$ 라 하면
직선 BD 의기울기가 3 이므로
$\overline{OD} = 3k$ 이고 $\overline{CO} = \frac{3}{2}k$
직선 AC 의 기울기는 $\dfrac{\frac{3}{2}k}{2k} = \dfrac{3}{4}$

16. 두 점 A$(-3,\ 4)$, B$(1,\ 2)$ 를 잇는 선분 AB 의 수직 이등분선의 방정식은?

① $2x-y+5=0$　　② $2x+y-2=0$　　③ $2x+y-1=0$
④ $x-2y+3=0$　　⑤ $x-2y+7=0$

해설

선분 $\overline{AB}$ 의 기울기 $=\dfrac{4-2}{-3-1}=-\dfrac{1}{2}$

선분 $\overline{AB}$ 의 중점 : $\left(\dfrac{-3+1}{2},\ \dfrac{4+2}{2}\right)=(-1,\ 3)$

선분 $\overline{AB}$ 에 수직인 기울기 m 은

$m\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-1\quad\therefore\ m=2$

$\therefore\ y=2\cdot(x+1)+3\ \rightarrow\ 2x-y+5=0$

17. 두 직선 $3x+4y=12,\ 3x+4y=7$사이의 거리를 구하면?

① -3　　② -1　　③ 1　　④ 3　　⑤ 5

해설

$3x+4y=12$ 위의 임의의 한 점을 잡는다.
$(4,\ 0)$과 $3x+4y=7$사이의 거리를 구한다.
$\therefore\ \dfrac{|3\cdot4+4\cdot0-7|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$

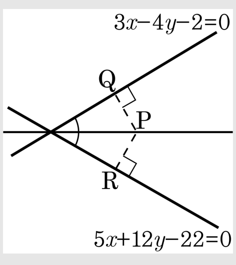
18. 두 직선 $3x-4y-2=0$, $5x+12y-22=0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선이 $ax+by+c=0$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

구하는 각의 이등분선 위의 임의의
점 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ 에 대하여 P에서
두 직선에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라 하면



$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PR}}$ 이므로

$$\frac{|3X-4Y-2|}{\sqrt{9+16}}=\frac{|5X+12Y-22|}{\sqrt{25+144}}$$

$13(3X-4Y-2)=\pm5(5X+12Y-22)$

즉, $13(3X-4Y-2)=5(5X+12Y-22)$ 또는

$13(3X-4Y-2)=-5(5X+12Y-22)$ 정리하면

$x-8y+6=0$ 또는 $8x+y-17=0$ 에서

기울기가 양이므로

$\therefore\ x-8y+6=0$

$\therefore a+b+c=-1$

19. 두 직선 $3x+2y-1=0$ 과 $2x-3y+1=0$ 으로부터 같은 거리에 있는 점들 중 x 와 y 의 좌표가 모두 정수인 점에 대한 다음 설명 중 옳은 것만을 골라 놓은 것은?

Ⅰ. 위 조건을 만족하는 점은 유한개이다. Ⅱ. 제2사분면의 점들 중에서 위 조건을 만족하는 것이 없다. Ⅲ. 제3사분면에 있는 모든 점들의 y좌표는 5의 배수이다.

① Ⅰ ② Ⅱ ③ Ⅲ ④ Ⅰ, Ⅲ ⑤ Ⅱ, Ⅲ

해설

두 직선에서 같은 거리에 있는 점을
$P(a,\ b)$ 라고 하면
$\frac{|3a+2b-1|}{\sqrt{13}} = \frac{|2a-3b+1|}{\sqrt{13}}$
$3a+2b-1 = 2a-3b+1$ 또는
$3a+2b-1 = -2a+3b-1$ 이므로
$a+5b-2=0,\ 5a-b=0$ 에서
$x+5y-2=0$, $5x-y=0$
즉, $y=-\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}$ 와
$y=5x$ 위에 있는 모든 점들은
주어진 두 직선에서 이르는 거리가 같다.
Ⅰ. 이러한 좌표는 무한개 존재한다.
Ⅱ. $y=-\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}$
위의 점, 예를 들면 $(-3,\ 1)$ 이 있다.
Ⅲ. $y=5x$ 로 x 가 정수일 때,
y 좌표는 5 의 배수이다.

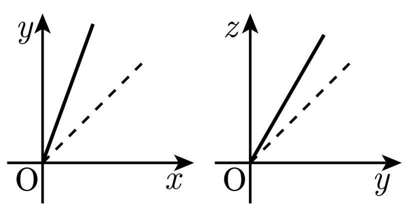
20. 정점 A(1, 2)와 직선 $3x-4y-5=0$ 위의 점을 연결하는 선분의 중점의 자취의 방정식은?

① $3x+4y=0$ ② $x-2y+5=0$ ③ $3x-4y=0$
④ $x+2y+5=0$ ⑤ $x-2y-5=0$

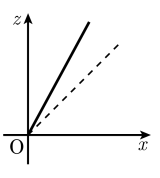
해설

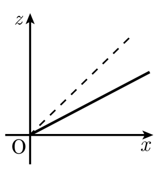
$3x-4y-5=0$ 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(a,\ b)$라 하면
$3a-4b-5=0\cdots$ ㉠
$\overline{\mathrm{AP}}$의 중점을 $(X,\ Y)$라 하면
$X=\dfrac{1+a}{2}$, $Y=\dfrac{2+b}{2}$
$\therefore a=2X-1,\ b=2Y-2$
이것을 ㉠에 대입하면
$3(2X-1)-4(2Y-2)-5=0$
$\therefore 6X-8Y=0$
$\therefore 3x-4y=0$

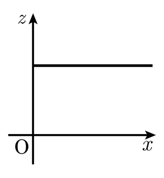
21. 세 변수 x, y, z 에 대하여 아래의 두 그래프(실선)는 각각 x 와 y , y 와 z 사이의 관계를 나타낸 것이다.

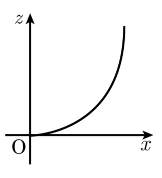


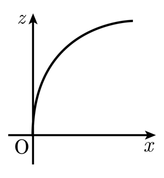
이때, x 와 z 사이의 관계를 그래프로 나타내면? (단, 점선은 원점을 지나고 기울기가 1 인 직선이다.)

① 

② 

③ 

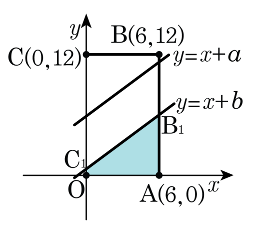
④ 

⑤ 

해설

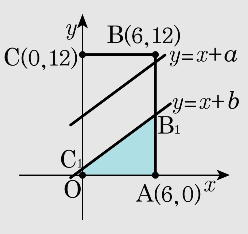
주어진 그래프에서 x, y, z 사이의 관계를
식으로 나타내면 $y = ax(a > 1)$, $z = by(b > 1)$
$\therefore\ z = b(ax) = abx\ (ab > 1)$
따라서, $z = abx$ 의 그래프는 보기의 ①과 같다.

22. 네 점 O$(0, 0)$, A$(6, 0)$, B$(6, 12)$, C$(0, 12)$를 꼭지점으로 하는 사각형 OABC가 있다. 그림과 같이 두 직선 $y = x + a$, $y = x + b$가 사각형 OABC의 넓이를 삼등분할 때, ab의 값은?



① 4　　② 5　　③ 6　　④ 7　　⑤ 8

해설



사각형 OABC의 넓이가 72이므로
사각형 $\mathrm{OAB_1C_1}$의 넓이는 24이다.
$\frac{1}{2}(b + 6 + b) \times 6 = 24$이므로 $b = 1$
같은 방법으로 $a = 5$
$\therefore\ ab = 5$

23. 다음 세 직선이 삼각형을 만들 수 있기 위한 k 의조건은?

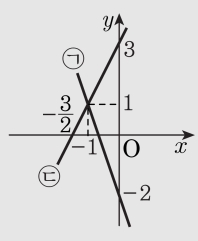
$$3x+y+2=0,\ x+3y+k=0,\ 2x-y+3=0$$

① $k \neq -2$　② $k \neq -3$　③ $k \neq -4$
④ $k \neq -7$　⑤ $k \neq -11$

해설

$3x+y+2=0 \cdots$ ㉠
$x+3y+k=0 \cdots$ ㉡ 일 때,
$2x-y+3=0 \cdots$ ㉢

다음 그림과 같이
세 직선이 삼각형을 만들려면 평행한 직선이 없어야 하고 세 직선이 한 점에서 만나지 않아야 한다.



㉠, ㉡, ㉢ 중에 어느 두 직선도 평행하지 않으므로 세 직선이 한 점에서 만나지 않을 조건을 구한다.
㉠과 ㉢을 연립하여 교점의 좌표를 구하면$(-1,\ 1)$ 이다.
이 점을 ㉡에 대입했을 때 등식이 성립하지 않아야 하므로 $-1+3+k \neq 0$, $\therefore\ k \neq -2$

24. 두 점 $(a,\ 0)$, $(0,\ b)$ 에서 직선 $2x-y=0$ 까지의 거리가 같을 때, $\dfrac{2a-b}{a+b}$ 의 값은 ? (단, $ab<0$)

① -4　　② -2　　③ 0　　④ 2　　⑤ 4

해설

두 점 $(a,\ 0)$, $(0,\ b)$ 에서
직선 $2x-y=0$
까지의 거리가 같으므로,
$\dfrac{|2a-0|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{|0-b|}{\sqrt{2^2+1^2}}$
$|2a|=|-b|$,$ab<0$ 이므로
$2a=-b$, $\therefore\ b=-2a$
따라서, $\dfrac{2a-b}{a+b}=\dfrac{2a+2a}{a-2a}=\dfrac{4a}{-a}=-4$

25. 원점 $O(0,\ 0)$ 에서 직선 $(k+1)x+(k+2)y+3=0$ 에 내린 수선의 길이가 최대일 때, 그 길이는? (단, k 는 상수)

① 2　　② 3　　③ $2\sqrt{2}$　　④ $2\sqrt{3}$　　⑤ $3\sqrt{2}$

해설

원점과 직선 사이의 거리를 d 라 하면

$$d=\frac{|3|}{\sqrt{(k+1)^2+(k+2)^2}}=\frac{3}{\sqrt{2k^2+6k+5}}$$

$$\le \frac{3}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=3\sqrt{2}$$

$(\because\ \sqrt{2k^2+6k+5}$

$$=\sqrt{2\left(k+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}\ge\sqrt{\frac{1}{2}})$$