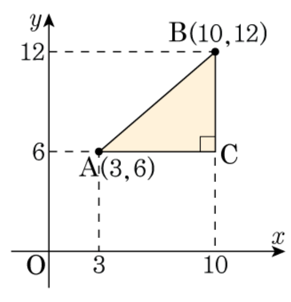
1. 수직선 위의 점 $\mathrm{A}(-2)$, $\mathrm{B}(-1)$, $\mathrm{C}(5)$ 가 있을 때, 두 점 사이의 거리 $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{BC}}$ 를 구하면?

① $\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\overline{\mathrm{BC}}=5$
② $\overline{\mathrm{AB}}=1$, $\overline{\mathrm{BC}}=5$
③ $\overline{\mathrm{AB}}=1$, $\overline{\mathrm{BC}}=6$
④ $\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\overline{\mathrm{BC}}=6$
⑤ $\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\overline{\mathrm{BC}}=4$

해설

$\overline{\mathrm{AB}}=-1-(-2)=1$
$\overline{\mathrm{BC}}=5-(-1)=6$

2. 다음 좌표평면 위의 두 점 $A(3, 6)$, $B(10, 12)$ 사이의 거리를 구하는 과정이다. $\boxed{}$ 안에 알맞은 수를 구하여라.



(두 점 A, B 사이의 거리)$= \overline{AB}$

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$$
$$= (10-3)^2 + (12-6)^2$$
$$= 49 + 36$$
$$= 85$$
$$\therefore \overline{AB} = \boxed{}$$

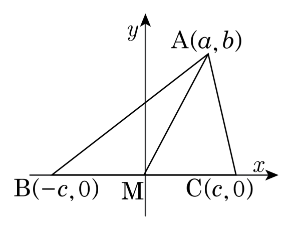
① $3\sqrt{5}$ ② 6 ③ $6\sqrt{7}$ ④ 8 ⑤ $\sqrt{85}$

해설

(두 점 A, B 사이의 거리)$= \overline{AB}$

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$$
$$= (10-3)^2 + (12-6)^2$$
$$= 49 + 36 = 85$$

3. 다음은 $\triangle$ABC 에서 변 BC의 중점을 M이라 할 때, $\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=2(\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2)$ 을 증명하는 과정이다.



직선 BC를 x축, 중점 M을 지나고 변 BC 에 수직인 직선을 y축으로 잡고, 세 꼭짓점 A, B, C의 좌표를 각각 A(a,b), B$(-c,0)$, C$(c,0)$ 라 하면 $\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=(a+c)^2+b^2+(a-c)^2+b^2=$(가) 이고, $\overline{\mathrm{AM}}^2=a^2+b^2, \overline{\mathrm{BM}}^2=c^2$ 따라서 $\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2=$(나) $\therefore \overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=$(다)$(\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2)$

위의 (가), (나), (다) 에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① $a^2+b^2+c^2, a^2+b^2+c^2, 1$

② $2(a^2+b^2+c^2), 2(a^2+b^2+c^2), 1$

③ $2(a^2+b^2+c^2), a^2+b^2+c^2, 2$

④ $2(a^2+b^2+c^2), 2(a^2+b^2+c^2), 2$

⑤ $3(a^2+b^2+c^2), a^2+b^2+c^2, 3$

해설

A(a,b), B$(-c,0)$, C$(c,0)$ 이므로

$\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2$
$=\{(-c-a)^2+(0-b)^2\}+\{(c-a)^2+(0-b)^2\}$
$=(c^2+2ca+a^2+b^2)+(c^2-2ca+a^2+b^2)$
$=2(a^2+b^2+c^2)$

$\overline{\mathrm{AM}}^2=a^2+b^2, \overline{\mathrm{BM}}^2=c^2$ 이므로
$\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2=a^2+b^2+c^2$
$\therefore \overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=2\,(\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2)$

4. 두 점 A(6, −4), B(1, 1) 을 이은 선분 AB를 2 : 3 으로 내분하는 점을 P, 외분하는 점을 Q라 할 때, 선분 PQ의 중점의 좌표는?

① (8, −10) ② (8, −8) ③ (8, −6)
④ (10, −8) ⑤ (10, −6)

해설

$P\left(\frac{2\times1+3\times6}{2+3}, \frac{2\times1+3\times(-4)}{2+3}\right)=(4, -2)$

$Q\left(\frac{2\times1-3\times6}{2-3}, \frac{2\times1-3\times(-4)}{2-3}\right)=(16, -14)$

따라서 선분 PQ 의 중점의 좌표는

$\left(\frac{4+16}{2}, \frac{-2+(-14)}{2}\right)$

$\therefore$ (10, −8)

5. 삼각형 ABC의 세 꼭짓점의 좌표가 $\mathrm{A}(2,\ -1)$, $\mathrm{B}(-3,\ 5)$, $\mathrm{C}(a,\ b)$이고 무게중심의 좌표가 $\mathrm{G}(-1,\ 1)$일 때, a와 b의 차 $a-b$의 값은?

① -3　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 5

해설

세 점을 알 때 무게중심을 구하는 공식에서

$\{2+(-3)+a\} \div 3 = -1$

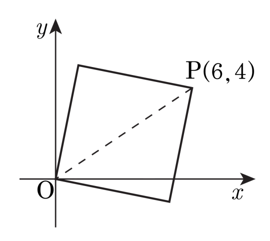
$\therefore a = -2$

$\{(-1)+5+b\} \div 3 = 1$

$\therefore b = -1$

따라서, $a-b$의 값은 $-2-(-1) = -1$

6. 다음 그림과 같은 정사각형의 넓이는?



① 16　　② 20　　③ 26

④ 32　　⑤ 52

해설

$\overline{\mathrm{OP}} = \sqrt{6^2+4^2} = \sqrt{52}$ 이므로
주어진 정사각형의 한 변의 길이를 a라고 하면
$\sqrt{a^2+a^2} = \sqrt{52}$ 에서 $a^2 = 26$ 이다.
따라서 정사각형의 넓이는 26이다

7. 두 점 $A(-3, 2)$, $B(4, 5)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P의 좌표는?

① $(-3,\ 0)$ ② $(1,\ 0)$ ③ $(2,\ 0)$
④ $(-1,\ 0)$ ⑤ $(5,\ 0)$

해설

x축 위의 점을 $P(x, 0)$라 하면
$\overline{PA} = \overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$이므로
$(x+3)^2 + (0-2)^2 = (x-4)^2 + (0-5)^2$
$14x = 28$
따라서 $x = 2$ 즉, $P(2,\ 0)$

8. 두 점 $A(-1, 4), B(6, 3)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점을 $P(a, b)$라 할 때, $a+b$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$P=(a, 0)$이므로 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$에서
$(a+1)^2+4^2=(a-6)^2+9$, $a=2$
$\therefore\ P=(2, 0)$
$a+b=2$

9. 두 점 A(−1, 2), B(4, 5)에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P와 y축 위의 점Q의 좌표를 구하면?

① P(2.4, −1), Q(0, 6)　　② P(3.6, 0), Q(−1, 6)

③ P(3.6, 0), Q(0, 6)　　④ P(2.4, 0), Q(0, 5)

⑤ P(3.6, 0), Q(−1, 2)

해설

A(−1, 2), B(4, 5)에서 같은 거리에 있는 P(x, 0) 과 Q(0, y)를 구해야 하므로 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\sqrt{(x+1)^2+2^2} = \sqrt{(x-4)^2+5^2}$

양변을 정리하면 $10x = 36 \therefore\ x = 3.6 \quad \therefore$ P(3.6, 0)

$\overline{AQ} = \overline{BQ}$에서 $\sqrt{1^2+(y-2)^2} = \sqrt{4^2+(y-5)^2}$

양변을 정리하면 $6y = 36 \therefore\ y = 6\ \therefore$ Q(0, 6)

10. 세 꼭짓점의 좌표가 각각 $\mathrm{A}(a, 3)$, $\mathrm{B}(-1, -5)$, $\mathrm{C}(3, 7)$ 인 $\triangle\mathrm{ABC}$가 $\angle\mathrm{A}$가 직각인 직각삼각형이 되도록 하는 상수 a의 값들의 합은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$\triangle\mathrm{ABC}$에서 $\angle\mathrm{A}$가 직각이므로
피타고라스의 정리에 의해
$\overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{CA}}^2 = \overline{\mathrm{BC}}^2 \cdots$ ㉠
이때, 세 점 $\mathrm{A}(a, 3)$, $\mathrm{B}(-1, -5)$, $\mathrm{C}(3, 7)$에 대하여

$\overline{\mathrm{AB}}^2 = (-1-a)^2 + (-5-3)^2 = a^2 + 2a + 65$

$\overline{\mathrm{CA}}^2 = (a-3)^2 + (3-7)^2 = a^2 - 6a + 25$

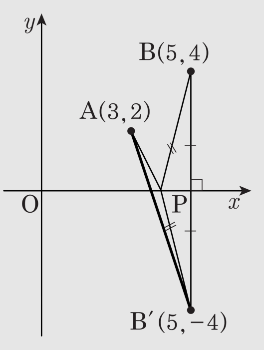
$\overline{\mathrm{BC}}^2 = (3+1)^2 + (7+5)^2 = 160$ 이므로
㉠에 의해 $2a^2 - 4a + 90 = 160$
$\therefore\ a^2 - 2a - 35 = 0$
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 a의 값들의 합은 2이다.

11. 좌표평면 위의 두 점 $A(3,2)$, $B(5,4)$ 와 x 축 위를 움직이는 점 P 에 대하여 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 의 최솟값은?

① 6　② $\sqrt{37}$　③ $\sqrt{38}$　④ $\sqrt{39}$　⑤ $\sqrt{40}$

해설

다음 그림과 같이 점 $B(5,\ 4)$ 를 x 축에 대하여
대칭이동한 점을 $B'(5,-4)$ 라 하면
$\overline{PB}=\overline{PB'}$ 이므로
$\overline{PA}+\overline{PB}=\overline{PA}+\overline{PB'}\geq\overline{AB'}$
따라서 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 의 최솟값은 $\overline{AB'}$ 이고
$\overline{AB'}=\sqrt{(5-3)^2+(-4-2)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$



12. 삼각형 ABC의 세 꼭짓점의 좌표가 A(1, 1), B(2, 4), C(6, 3)이고 선분 AB를 2 : 1로 외분하는 점을 D라 하자. 삼각형 BCD의 무게중심의 좌표가 (x, y)일 때, $x-y$의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

두 점 A(1, 1), B(2, 4)이므로
점 D의 좌표를 (a, b)라 하면

$a=\dfrac{2\cdot 2-1\cdot 1}{2-1}=3$, $b=\dfrac{2\cdot 4-1\cdot 1}{2-1}=7$

따라서 D(3, 7)이므로
삼각형 BCD의 무게중심의 좌표 (x, y)는

$x=\dfrac{2+6+3}{3}=\dfrac{11}{3}$, $y=\dfrac{4+3+7}{3}=\dfrac{14}{3}$

$\therefore x-y=\dfrac{11}{3}-\dfrac{14}{3}=-1$

13. $\triangle$ABC의 세 꼭짓점의 좌표가 A$(-1, -2)$, B$(2,\ 5)$, C$(7,\ 3)$ 으로 주어질 때, 각 변의 중점을 꼭지점으로 하는 삼각형의 무게중심의 좌표는?

① G$\left(\frac{4}{3},\ 1\right)$　② G$\left(\frac{7}{3},\ \frac{2}{3}\right)$　③ G$\left(2,\ \frac{8}{3}\right)$
④ G$\left(\frac{8}{3},\ 1\right)$　⑤ G$\left(\frac{8}{3},\ 2\right)$

해설

세 변의 중점의 좌표를 각각 구하면

$\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{9}{2},\ 4\right)$, $\left(3,\ \frac{1}{2}\right)$

구하고자 하는 무게중심의 좌표를 G(x, y) 라 하면

$x = \dfrac{\frac{1}{2} + \frac{9}{2} + 3}{3}$, $y = \dfrac{\frac{3}{2} + 4 + \frac{1}{2}}{3}$

$\therefore\ x = \frac{8}{3},\ y = 2$

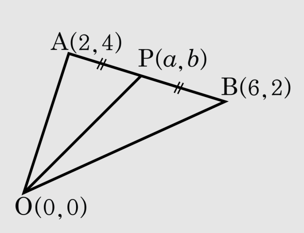
$\therefore$ G$\left(\frac{8}{3}, 2\right)$

14. 세 점 $\mathrm{O}(0,0), \mathrm{A}(2,4), \mathrm{B}(6,2)$ 와 선분 AB 위의 점 $\mathrm{P}(a,b)$ 에 대하여 삼각형 OAB 의 넓이가 삼각형 OAP 의 넓이의 2배일 때, $a+b$ 의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

다음 그림에서 $\triangle\mathrm{OAB}$ 와 $\triangle\mathrm{OAP}$ 의 높이가 같으므로
$\triangle\mathrm{OAB} = 2\triangle\mathrm{OAP}$ 이려면
P는 선분 AB 의 중점이어야 한다.
이 때, $\mathrm{P}\left(\dfrac{2+6}{2}, \dfrac{4+2}{2}\right)$
즉 $\mathrm{P}(4,3)$ 이므로 $a=4, b=3$
$\therefore a+b=7$



15. 두 점 A$(2, -1)$, B$(6, 3)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점을 P, y축 위의 점을 Q라 할 때, $\triangle$OPQ의 외심의 좌표를 $(x,\ y)$라 할 때, $x+y$의 값을 구하여라.(단, O는 원점)

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

P$(a, 0)$, Q$(0, b)$라 하면
$(2-a)^2+(-1-0)^2=(6-a)^2+(3-0)^2 \cdots$ ㉠
$(2-0)^2+(-1-b)^2=(6-0)^2+(3-b)^2 \cdots$ ㉡
㉠에서 $a=5$, ㉡에서 $b=5$
$\triangle$OPQ의 외심을 (x, y)라 하면
$x^2+y^2=(x-5)^2+y^2=x^2+(y-5)^2$
$\therefore\ -10x+25=0, -10y+25=0$
$\therefore\ x=y=\frac{5}{2}$
따라서 외심의 좌표는 $\left(\frac{5}{2},\ \frac{5}{2}\right)$
$\therefore\ x+y=5$

16. 다음은 11 세기 경 아라비아의 수학책에 나오는 내용을 변형한 것이다. 강을 사이에 두고 두 그루의 나무가 서 있었는데 두 나무의 높이는 각각 20m , 30m 이고 두 나무 사이의 거리는 50m 이다. 각각의 나무 꼭대기에 새가 앉아서 수면에 있는 한 마리의 물고기를 노리고 있었다. 이 두 마리의 새가 동시에 날아서 일직선 위로 그 물고기에게 덤벼들어 똑같이 그 물고기가 있는 수면에 당도하였다. 두 마리의 새의 속도가 같다고 하였을 때, 높이가 20m 인 나무 밑에서 물고기까지의 거리는 몇 m 인지 구하여라.

▶ 답： ______ m

▷ 정답： 30 m

해설

20m, 30m 나무 위의 두 마리의 새의 위치를 각각 A, B 라 하고, 높이가 20m 인 나무 밑으로부터 물고기가 있는 P 까지의 거리를 a 라 하면 $\overline{PA} = \overline{PB}$ 이므로 $a^2 + 20^2 = (50 - a)^2 + 30^2$

$\therefore\ a = 30(\mathrm{m})$

17. 좌표평면 위의 점 A(1, 4) 에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}$ 를 3 : 2 로 외분하는 점 Q 의 좌표가 (4, 1) 일 때, $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{2}$

해설

점 B 의 좌표를 B$(a,\ b)$ 라 하면

점 Q 의 좌표는 Q$\left(\frac{3a-2}{3-2},\ \frac{3b-8}{3-2}\right)$ 이다.

이때, 점 Q 의 좌표가 (4, 1) 이므로

$3a-2=4 \quad \therefore\ a=2,$

$3b-8=1 \quad \therefore\ b=3$

$\therefore$ B(2, 3)

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(2-1)^2+(3-4)^2}=\sqrt{2}$

18. 원점 O와 두 정점 A(2, 3), B(4, 0)에 대하여 $\overline{OP}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$을 만족하는 점 P의 자취의 방정식을 구하면?

① $x^2 + y^2 - 12x - 6y + 29 = 0$

② $x^2 + y^2 + 12x - 6y + 29 = 0$

③ $x^2 + y^2 - 12x + 6y + 29 = 0$

④ $x^2 + y^2 - 12x - 6y - 29 = 0$

⑤ $x^2 + y^2 + 12x + 6y + 29 = 0$

해설

P의 좌표를 P$(x,\ y)$라 하면

$\overline{OP}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$이므로

$x^2 + y^2$

$= \{(x-2)^2 + (y-3)^2\} + \{(x-4)^2 + y^2\}$

$\therefore\ x^2 + y^2 - 12x - 6y + 29 = 0$

19. 두 점 A(1, 5), B(5, 3)에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}^2}+\overline{\mathrm{BP}^2}$의 값이 최소가 되는 점 P의 좌표는?

① (4, 5) ② (3, 4) ③ (2, 3)
④ (1, 2) ⑤ (0, 1)

해설

$\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$의 값이 최소가 되기 위한
점 P는 점 A와 점 B의 중점이어야 한다.
따라서 P(3, 4)

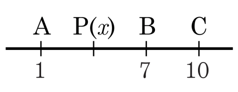
해설

P(x, y)로 놓으면

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2 &= \{(x-1)^2+(y-5)^2\} \\ &\quad +\{(x-5)^2+(y-3)^2\} \\ &= 2x^2-12x+2y^2-16y+60 \\ &= 2(x^2-6x+9)+2(y^2-8y+16)+10 \\ &= 2(x-3)^2+2(y-4)^2+10\end{aligned}$$

따라서 $x=3$, $y=4$일 때 최솟값을 갖는다.

20. 수직선 위의 세 점 A(1), B(7), C(10)과 동점 P(x)에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2+\overline{\mathrm{CP}}^2$이 최소가 되는 점 P의 좌표를 구하면?



① P(5) ② P(6) ③ P(7) ④ P(8) ⑤ P(9)

해설

$\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2+\overline{\mathrm{CP}}^2$

$=(x-1)^2+(x-7)^2+(x-10)^2$

$=3(x-6)^2+42$

따라서 $x=6$일 때 최소가 된다.

21. 직선 $x+y=2$ 위에 있고, 두 점 $\mathrm{A}(0,6)$, $\mathrm{B}(2,2)$에서 같은 거리에 있는 점을 P라 할 때, $\overline{\mathrm{AP}}$의 길이를 구하면?

① 2　② $\sqrt{5}$　③ $2\sqrt{2}$　④ $\sqrt{10}$　⑤ 5

해설

$x+y=2$ 위에 있는 점 P는
$(\alpha, -\alpha+2)$로 나타낼 수 있다.
$\overline{\mathrm{AP}}^2 = \overline{\mathrm{BP}}^2$이므로
$\alpha^2+(-\alpha-4)^2=(\alpha-2)^2+(-\alpha)^2$
$\alpha=-1$
$\mathrm{P}(-1,\ 3)$
$\therefore\ \overline{AP}=\sqrt{(-1)^2+(-3)^2}=\sqrt{10}$

22. 평행사변형 ABCD의 두 대각선의 교점을 M이라하자. 두 점 A, C의 좌표는 각각 $A(-2,6), C(4,0)$이고, 삼각형 MBC의 무게중심은 원점이다. 점 D의 좌표를 (a,b)라고 할 때, $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 16

해설

점 M은 선분 AC의 중점이므로

M의 좌표는 $\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{6+0}{2}\right)=(1,3)$.

삼각형 MBC의 무게중심은 원점이므로

점 B의 좌표를 (c,d)라고 하면

$\frac{1+c+4}{3}=0$에서 $c=-5$

$\frac{3+d+0}{3}=0$에서 $d=-3$

따라서 점 B의 좌표는 $(-5,-3)$이다. 점 M은 선분 BD의 중점이므로

$\frac{-5+a}{2}=1$에서 $a=7$

$\frac{-3+b}{2}=3$ 에서 $b=9$

$\therefore a+b=16$

23. $\triangle ABC$ 의 세변 AB, BC, CA 의 중점의 좌표가 각각 $(-2,\ 7)$, $(-6,\ 4)$, $(5,\ -2)$ 일 때, 이 삼각형의 무게중심의 좌표는 $(a,\ b)$ 이다. 이 때, $a+b$ 의 값을 구하면?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

$A(a_1,\ b_1)$ $B(a_2,\ b_2)$ $C(a_3,\ b_3)$ 라고 하면 각 중점좌표는

$\left(\dfrac{a_1+a_2}{2},\ \dfrac{b_1+b_2}{2}\right)$,

$\left(\dfrac{a_2+a_3}{2},\ \dfrac{b_2+b_3}{2}\right)$,

$\left(\dfrac{a_3+a_1}{2},\ \dfrac{b_3+b_1}{2}\right)$ 이고

이들의 합을 3 으로 나누면,

$\left(\dfrac{a_1+a_2+a_3}{3},\ \dfrac{b_1+b_2+b_3}{3}\right)$ 로

$\triangle ABC$ 의 무게중심의 좌표와 같다.

따라서 무게중심의 좌표는

$G = \left(\dfrac{-2-6+5}{3},\ \dfrac{7+4-2}{3}\right) = (-1,\ 3)$

$\therefore\ 2$

24. 세 점 A(−2, 0), B(−1, $\sqrt{3}$), C(1, − 4) 를 꼭지점으로 하는 삼각형 ABC 에서 ∠A 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라 할 때, △ABD 와 △ACD 의 넓이의 비는?

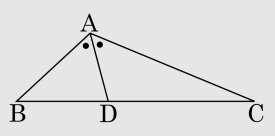
① 1 : 2　② 1 : 3　③ 1 : 4　④ 2 : 3　⑤ 2 : 5

해설

점 D 가 ∠A 의 이등분선과 변 BC 의 교점이므로

$\overline{BD} : \overline{DC} = \overline{AB} : \overline{AC} = \sqrt{1+3} : \sqrt{9+16} = 2 : 5$

$\therefore$ △ABD : △ACD = $\overline{BD} : \overline{DC} = 2 : 5$



25. 점 $\mathrm{P}(a,b)$가 직선 $y=3x+2(-1 \le x \le 2)$ 위를 움직일 때, 점 $\mathrm{Q}(a+b, a-b)$가 나타내는 자취의 길이는?

① $2\sqrt{5}$　② $3\sqrt{5}$　③ $4\sqrt{5}$　④ $5\sqrt{5}$　⑤ $6\sqrt{5}$

해설

점 $\mathrm{P}(a,b)$가 직선 $y=3x+2$ 위의 점이므로
$b=3a+2$(단, $-1 \le a \le 2$) $\cdots$ ㉠
이 때, 점 $\mathrm{Q}(a+b, a-b)$에서
$a+b=X,\ a-b=Y$로 놓고
a, b를 X, Y로 나타내면
$a=\frac{X+Y}{2},\ b=\frac{X-Y}{2}$
이것을 ㉠에 대입하면
$\frac{X-Y}{2}=\frac{3X+3Y}{2}+2$
$\therefore X+2Y+2=0$
한편, $X=a+b=a+(3a+2)=4a+2$이고
$-1 \le a \le 2$이므로 $-2 \le 4a+2 \le 10$
$\therefore -2 \le X \le 10$
따라서 점 $\mathrm{Q}(x,y)$는
직선 $x+2y+2=0$ (단, $-2 \le x \le 10$) 위를 움직인다.
그런데 $x=-2$일 때, $y=0$
$x=10$일 때, $y=-6$이므로
구하는 자취의 길이는 두 점 $(-2,0), (10,-6)$을 이은 선분의 길이와 같다.
$\therefore \sqrt{(10+2)^2+(-6)^2}=\sqrt{180}=6\sqrt{5}$