

1. 다음 문장 중 명제인 것을 모두 고르면?

- ① 북한산은 아름답다.
- ② 미국의 수도는 뉴욕이다.
- ③ 거짓말은 나쁘다.
- ④ 우리나라의 미래는 청소년에게 달렸다.
- ⑤ 세계에서 가장 긴 강은 나일강이다.

해설

② 거짓, ⑤ 참
따라서 명제는 ②, ⑤ 이다.

2. 다음 중 참인 명제는? (단, 문자는 모두 실수이다.)

- ① $a < b$ 이면 $a + c > b + c$
- ② $a < b$ 이면 $a - c > b - c$
- ③ $a < b$ 이고 $c > 0$ 이면 $ac > bc$
- ④ $a < b$ 이고 $c > 0$ 이면 $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$
- ⑤ $ac < bc$ 이면 $a > b$

해설

실수의 대소 관계에는 다음과 같은 성질이 있다.

- i) 임의의 두 실수 a, b 에 대하여 $a > b, a = b, a < b$ 중에서 어느 하나만이 성립한다.
 - ii) $a > b, b > c$ 이면 $a > c$
 - iii) $a > b$ 이면 $a \pm c > b \pm c$
 - iv) $a > b, c > 0$ 이면 $ac > bc$
 - v) $a > b, c < 0$ 이면 $ac < bc$
- 따라서 참인 것은 ④이다.

3. 명제 $p \rightarrow \sim q$ 의 대우는?

① $p \rightarrow q$

② $\sim q \rightarrow p$

③ $\sim q \rightarrow \sim p$

④ $\sim p \rightarrow q$

⑤ $q \rightarrow \sim p$

해설

$p \rightarrow q$ 의 대우는 $\sim q \rightarrow \sim p$, $p \rightarrow \sim q$ 의 대우는 $\sim(\sim q) \rightarrow \sim p$
 $\therefore q \rightarrow \sim p$

4. $x > 0, y > 0$ 일 때 두 식 $\sqrt{x} + \sqrt{y}, \sqrt{2(x+y)}$ 를 바르게 비교한 것은?

① $\sqrt{x} + \sqrt{y} < \sqrt{2(x+y)}$

② $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \sqrt{2(x+y)}$

③ $\sqrt{x} + \sqrt{y} > \sqrt{2(x+y)}$

④ $\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq \sqrt{2(x+y)}$

⑤ $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2(x+y)}$

해설

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} > 0, \sqrt{2(x+y)} > 0$$

$$\begin{aligned} \text{이 때 } (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 - \left\{ \sqrt{2(x+y)} \right\}^2 \\ &= (x + y + 2\sqrt{xy}) - (2x + 2y) \\ &= -(x - 2\sqrt{xy} + y) \\ &= -(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{이므로 } (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 &\leq \left\{ \sqrt{2(x+y)} \right\}^2 \\ \therefore (\sqrt{x} + \sqrt{y}) &\leq \sqrt{2(x+y)} \\ (\text{단, 등호는 } \sqrt{x} &= \sqrt{y}, \text{ 즉 } x = y \text{ 일 때 성립}) \end{aligned}$$

5. 양의 실수 a, b, c 사이에 대하여 $\frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c}$ 의 최솟값을 구하여라.

- ① 9 ② 11 ③ 13 ④ 15 ⑤ 17

해설

$$\begin{aligned} & \frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c} \\ &= 1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b} + 1 + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + 1 \\ &= 3 + \frac{b}{a} + \frac{a}{b} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{c} \text{에서} \\ & \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} = 2 \\ & \sqrt{\frac{c}{a} \cdot \frac{a}{c}} = 2, \frac{c}{b} + \frac{b}{c} \geq 2\sqrt{\frac{c}{b} \cdot \frac{b}{c}} = 2 \\ & \text{따라서 주어진 식의 최솟값은 } 3 + 6 = 9 \end{aligned}$$

6. 조건 $x < 1$ 또는 $x > 2$ 의 부정은?

① $x < 1$ 그리고 $x > 2$

② $x \leq 1$ 또는 $x \geq 2$

③ $x \geq 1$ 또는 $x \leq 2$

④ $x \leq 1$ 그리고 $x \geq 2$

⑤ $1 \leq x \leq 2$

해설

$x < 1$ 또는 $x > 2$ 의 부정은 $1 \leq x \leq 2$ 이다.

7. 전체집합이 $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 일 때, 다음 중 옳은 것은?

- ① 조건 ' $x^2 - 6x + 8 = 0$ '의 진리집합은 $\{2, 3\}$ 이다.
- ② 조건 ' x 는 소수이다.'의 진리집합은 $\{1, 3, 5\}$ 이다.
- ③ 조건 ' x 는 4의 약수이다.'의 진리집합은 $\{0, 1, 2, 4\}$ 이다.
- ④ 조건 ' $0 \leq x < 4$ 이고 $x \neq 2$ 이다.'의 진리집합은 $\{0, 1, 3\}$ 이다.
- ⑤ 조건 ' x 는 6의 약수이다.'의 진리집합은 $\{1, 2, 3\}$ 이다.

해설

- ① $x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ 또는 $x = 4$
 , 따라서, 진리집합은 $\{2, 4\}$
- ② 소수는 2, 3, 5 이므로 진리집합은 $\{2, 3, 5\}$
- ③ 4의 약수는 1, 2, 4 이므로 진리집합은 $\{1, 2, 4\}$
- ④ $x = 0, 1, 2, 3$ 이고 $x \neq 2$ 이므로 진리집합은 $\{0, 1, 3\}$
- ⑤ 전체집합이 $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 이고 6의 약수는 1, 2, 3, 6 이므로 진리집합은 $\{1, 2, 3, 6\}$

8. 전체집합 U 에서 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 한다.
 $\sim p \rightarrow \sim q$ 가 참일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

- ① $P \cup Q = U$
- ② $P \cap Q = \phi$
- ③ $Q \subset P$
- ④ $P \subset Q$
- ⑤ $P = Q$

해설

$\sim p \rightarrow \sim q$ 이 참이면 $P^c \subset Q^c \leftrightarrow P \supset Q$

해설

$\sim p \rightarrow \sim q$ 이 참이면 대우인 $q \rightarrow p$ 가 참따라서 $Q \subset P$

9. 다음 중 p 가 q 이기 위한 필요충분조건인 것은?(a, x, y, z 는 모두 실수)

- ① $p : a < b, \quad q : |a| < |b|$
② $p : 2x + 3 = 5, \quad q : x^2 - 2x + 1 = 0$
③ $p : a > 3, \quad q : a^2 > 9$
④ $p : x > 0$ 이고 $y > 0, \quad q : x + y > 0$
⑤ $p : xy = yz, \quad q : x = z$

해설

주어진 명제도 참이고 역도 참인 것을 고른다.

- ① 주어진 명제, 역 모두 거짓이다.
② p, q 를 만족하는 값이 모두 $x = 1$ 이므로 필요충분조건이다.
③, ④ 주어진 명제만 참이고 역은 성립하지 않는다. $\therefore p$ 는 q 이기 위한 충분조건이다.
⑤ 주어진 명제는 거짓이고 역은 참이다.
 $\therefore p$ 는 q 이기 위한 필요조건이다.

10. 명제 p, q, r 에 대하여 p 는 q 이기 위한 필요조건, r 은 q 이기 위한 충분조건일 때, p 는 r 이기 위한 무슨 조건인가?

① 필요

② 충분

③ 필요충분

④ 아무 조건도 아니다.

⑤ q 에 따라 다르다.

해설

p 는 q 이기 위한 필요조건이므로 $p \Leftarrow q$,
즉 $q \Rightarrow p$ 가 성립하고 r 은 q 이기 위한 충분조건,
즉 $r \Rightarrow q$ 가 성립하므로 $r \Rightarrow q \Rightarrow p$ 이다.
그러나 $p \Rightarrow r$ 인지는 알 수 없다.
따라서 $r \Rightarrow p$ 이므로 p 는 r 이기 위한 필요조건이다.

11. a, b 가 양수일 때, $\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a} + 4b\right)$ 의 최솟값을 구하면?

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a} + 4b\right) = 1 + 4ab + \frac{1}{ab} + 4$$

a, b 가 양수이므로, $ab > 0$

$$4ab + \frac{1}{ab} \geq 2 \cdot \sqrt{4ab \cdot \frac{1}{ab}} = 4$$

$$\therefore \left(a + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a} + 4b\right) = 4ab + \frac{1}{ab} + 5 \geq 5 + 4 = 9$$

12. $x + y = 3$ 일 때, xy 의 최댓값을 구하여라. (단, $xy > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{9}{4}$

해설

$$3 = x + y \geq 2\sqrt{xy}$$

따라서 $x = y = \frac{3}{2}$ 일 때, xy 의 최댓값 $\frac{9}{4}$

13. 실수 x, y 에 대하여 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 이 성립할 때, $x + y$ 의 최댓값은?

① $\sqrt{7}$

② 3

③ $\sqrt{13}$

④ 5

⑤ 12

해설

코시-슈바르츠부등식에 의해서

$$(2^2 + 3^2) \left\{ \left(\frac{x}{2} \right)^2 + \left(\frac{y}{3} \right)^2 \right\} \geq (x + y)^2$$

$13 \geq (x + y)^2$ 이므로

$$-\sqrt{13} \leq x + y \leq \sqrt{13}$$

$\therefore x + y$ 의 최댓값은 $\sqrt{13}$

14. 실수 a, b, x, y 에 대하여 $a^2 + b^2 = 5, x^2 + y^2 = 3$ 일 때 다음 중 $ax + by$ 의 값이 될 수 없는 것은?

① -1 ② 0 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

a, b, x, y 가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
 $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$
 $5 \times 3 \geq (ax + by)^2$
 $\therefore -\sqrt{15} \leq ax + by \leq \sqrt{15}$
따라서 4는 $ax + by$ 의 범위에 속하지 않는다.

15. 명제 ‘ $|x-3| < a$ 이면 $1 < x < 7$ 이다.’ 가 참이 되기 위한 양수 a 의 최댓값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$$-a < x-3 < a \Rightarrow 3-a < x < 3+a$$

$$\{x|3-a < x < 3+a\} \subset \{x|1 < x < 7\}$$

$\therefore 1 \leq 3-a$ 과 $3+a \leq 7$ 을 동시에 만족해야 한다.

$$\therefore a \leq 2$$

16. 두 명제 $p \rightarrow q$ 와 $r \rightarrow \sim q$ 가 모두 참일 때, 보기에서 반드시 참인 것을 모두 고르면?

$\neg p \rightarrow r$	$\neg r \rightarrow p$	$\neg p \rightarrow \sim r$
$\neg q \rightarrow \sim r$	$\neg r \rightarrow \sim p$	

- ① $\neg, \neg$

② $\neg, \neg, \neg$

③ $\neg, \neg$
- ④ $\neg, \neg, \neg$

⑤ $\neg, \neg, \neg$

해설

$p \rightarrow q$ 가 참이고, 또한 $r \rightarrow \sim q$ 가 참이므로 그 대우명제인 $q \rightarrow \sim r$ 가 참. $\therefore p \rightarrow q \rightarrow \sim r$
즉, $p \rightarrow \sim r, q \rightarrow \sim r$ 가 참이고 또한 $p \rightarrow \sim r$ 이 참이므로 그 대우인 $r \rightarrow \sim p$ 도 참이다.
따라서 $\neg, \neg, \neg$ 이 참이다.

18. 부등식 $2^{50} > 5^{10n}$ 을 만족하는 자연수 n 의 갯수를 구하여라.

▶ 답 : 2 개

▷ 정답 : 2 개

해설

$$\frac{2^{50}}{5^{10n}} = \frac{(2^5)^{10}}{(5^n)^{10}} = \left(\frac{32}{5^n}\right)^{10}$$

이 때 $2^{50} > 5^{10n}$ 이므로 $\left(\frac{32}{5^n}\right) > 1$

$\therefore n = 1, 2$

n 의 갯수는 2 개이다.

19. 다음 부등식 중 성립하지 않은 것은?

① $|a| - |b| \geq |a - b|$

② $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

③ $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$

④ $a^2 + ab + b^2 \geq 0$

⑤ $a^2 + b^2 + 1 > 2(a + b - 1)$

해설

① 반례 : $a = -1, b = 1$

$$|-1| - |1| \geq |-1 - 1|$$

$$|-1| - |1| \geq |-2|$$

$$1 - 1 \geq 2 \rightarrow 0 \geq 2 \rightarrow (\times)$$

② $2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca)$

$$= (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0 \rightarrow (\bigcirc)$$

③ $a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2 \geq a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2$

$$a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2 = (ay - bx)^2 \geq 0 \rightarrow (\bigcirc)$$

④ $a^2 + ab + b^2 = \left(a + \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3b^2}{4} \geq 0 \rightarrow (\bigcirc)$

⑤ $a^2 + b^2 + 1 - 2(a + b - 1)$

$$= a^2 - 2a + 1 + b^2 - 2b + 1 + 1$$

$$= (a - 1)^2 + (b - 1)^2 + 1 > 0 \rightarrow (\bigcirc)$$

20. 다음 [보기] 중에 x 에 대한 절대부등식인 것을 모두 고른 것은? (단, x 는 실수이다.)

보기

- $\textcircled{\tiny \neg} \quad x + 1 > 0$
- $\textcircled{\tiny \cup} \quad x^2 - 2x + 1 \geq 0$
- $\textcircled{\tiny \subset} \quad x^2 < x + 12$
- $\textcircled{\tiny \ominus} \quad x^2 + 1 > x$

- ① $\textcircled{\tiny \cup}$
- ② $\textcircled{\tiny \neg}, \textcircled{\tiny \subset}$
- ③ $\textcircled{\tiny \cup}, \textcircled{\tiny \subset}$
- ④ $\textcircled{\tiny \cup}, \textcircled{\tiny \ominus}$
- ⑤ $\textcircled{\tiny \neg}, \textcircled{\tiny \cup}, \textcircled{\tiny \subset}$

해설

- $\textcircled{\tiny \neg} \quad x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$
- $\textcircled{\tiny \cup} \quad x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 \geq 0$
 $\Leftrightarrow x$ 는 모든 실수(절대부등식)
- $\textcircled{\tiny \subset} \quad x^2 < x + 12 \Leftrightarrow x^2 - x - 12 < 0$
 $\Leftrightarrow (x + 3)(x - 4) < 0$
 $\Leftrightarrow -3 < x < 4$
- $\textcircled{\tiny \ominus} \quad x^2 + 1 > x \Leftrightarrow x^2 - x + 1 > 0$
 $\Leftrightarrow \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + 1 - \frac{1}{4} > 0$
 $\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$
 $\Leftrightarrow x$ 는 모든 실수(절대부등식)

21. 두 조건 p, q 가 $p : |x| < a, q : |x - 1| \geq 3$ 과 같이 주어져 있다. 명제 $\sim p \rightarrow q$ 가 참일 때, 양수 a 의 범위를 구하면?

- ① $0 < a \leq 4$ ② $a > 4$ ③ $a \geq 4$
 ④ $a > 2$ ⑤ $2 \leq a \leq 4$

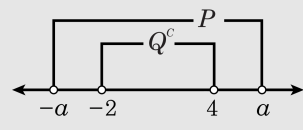
해설

$$\sim p \rightarrow q \Rightarrow \sim q \rightarrow p \Rightarrow Q^c \subset P$$

$$P = \{x | -a < x < a\}$$

$$Q = \{x | x \leq -2 \text{ 또는 } x \geq 4\}$$

$$Q^c = \{x | -2 < x < 4\}$$



$$-a \leq -2 \rightarrow a \geq 2, a \geq 4$$

$$\therefore a \geq 4$$

22. P 섬에 사는 사람들은 오직 진실만을 말하고, Q 섬에 사는 사람들은 오직 거짓만을 말한다. 이 두 섬으로부터 온 세 사람 A, B, C가 있다. A, B는 다음과 같이 말했다.

A : 우리는 모두 Q 섬에서 왔다.B : 우리들 중 오직 한 사람만이 P 섬에서 왔다.

A, B, C는 각각 어느 섬으로부터 왔는가?

- ① A,B는 P 섬, C는 Q 섬에서 왔다.
- ② A,B는 Q 섬, C는 Q 섬에서 왔다.
- ③ A,B,C는 모두 Q 섬에서 왔다.
- ④ B는 P 섬, A,C는 Q 섬에서 왔다.
- ⑤ B는 Q 섬, A,C는 P 섬에서 왔다.

해설

A의 말은 거짓이다. 즉, A는 Q 섬 사람이고 ‘우리 모두 Q 섬 사람이다.’가 거짓이므로 B, C 중 P 섬 사람이 있어야 한다. 만일 B가 P 섬 사람이면 B의 말이 진실이므로 C는 Q 섬에서 왔다. 그러나 B가 Q 섬에서 왔다면 B의 말이 거짓이므로 P 섬 사람이 둘 이상이어야 하는데 A와 B가 Q 섬 사람이므로 모순이다. 따라서, B는 P 섬, A,C는 Q 섬에서 왔다.

23. 다음은 ‘ x, y 가 자연수일 때, xy 가 짝수이면 x 또는 y 가 짝수이다.’를 증명하는 과정이다.(가), (나), (다)에 들어갈 말로 알맞게 짝지어진 것은?

주어진 명제의 대우는 ‘자연수 x, y 에 대하여 x 와 y 가 (가)이면 xy 도 (가)이다.’이다.
 $x = 2a - 1, y = 2b - 1$ (a, b 는 자연수)라 하면
 $xy = (2a - 1)(2b - 1) = 2(2ab - a - b) + 1$ 이므로 xy 는 (나)가 된다.
따라서, 대우가 (다)이므로 주어진 명제도 (다)이다.

- ① 짝수, 홀수, 참

② 짝수, 짝수, 참
- ③ 짝수, 짝수, 거짓

④ 홀수, 홀수, 참
- ⑤ 홀수, 홀수, 거짓

해설

주어진 명제의 대우는 ‘자연수 x, y 에 대하여 x 와 y 가 홀수이면 xy 도 홀수이다.’이다.
 $x = 2a - 1, y = 2b - 1$ (a, b 는 자연수)라 하면
 $xy = (2a - 1)(2b - 1) = 2(2ab - a - b) + 1$ 이므로 xy 는 홀수가 된다.
따라서, 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

24. 다음 중 명제 $|\alpha - \beta| = |\alpha + \beta|$ 의 필요조건이기는 하지만 충분조건은 아닌 것을 찾으면? (단, α, β 는 실수)

- ① $\alpha\beta < 1$ ② $\alpha\beta = -1$ ③ $\alpha\beta = 0$
④ $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ ⑤ $\alpha^2 - \beta^2 = 0$

해설

$|\alpha - \beta| = |\alpha + \beta| \rightarrow (\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 \rightarrow -2\alpha\beta = 2\alpha\beta$
 $\rightarrow \alpha\beta = 0$
0 은 1 보다 작으므로 $\alpha\beta = 0$ 이면 $\alpha\beta < 1$ 라고 말할 수 있다.
따라서, $\alpha\beta < 1$ 는 $\alpha\beta = 0$ 의 필요조건이다.

25. 세 조건 p, q, r 를 만족하는 진리집합이 각각 $P = \{x \mid x \leq -2, 1 \leq x \leq 5\}$, $Q = \{x \mid x \leq a\}$, $R = \{x \mid x \leq b\}$ 이다. p 는 q 이기 위한 필요조건이고, r 이기 위한 충분조건이 되도록 상수 a, b 에 대한 a 의 최댓값을 M , b 의 최솟값을 m 이라 할 때, $M + m$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

p 가 q 이기 위한 필요조건, r 이기 위한 충분조건이므로 $Q \subset P \subset R$ 이 성립한다.
따라서 $a \leq -2, b \geq 5$ 이므로 a 의 최댓값은 -2 , b 의 최솟값은 5
 $\therefore -2 + 5 = 3$