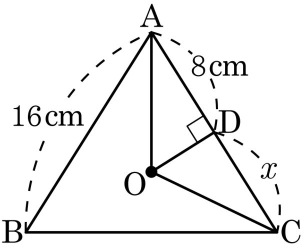
1. 다음 그림에서 점 O는 삼각형 $\triangle ABC$의 외심일 때, x의 값을 구하여라.



▶ **답 :**

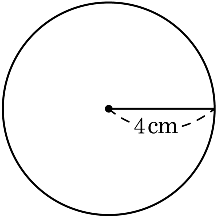
▷ **정답 :** $8\,\mathrm{cm}$

해설

$\triangle ADO \equiv \triangle CDO$(RHS 합동)

$\therefore\ x = \overline{AD} = 8\,\mathrm{cm}$

2. 지원이는 그림과 같은 원에 원의 둘레 위에 꼭짓점을 두는 직각삼각형을 그리려고 한다. 직각삼각형의 빗변의 길이를 구하여라.



▶ **답 :** ____ cm

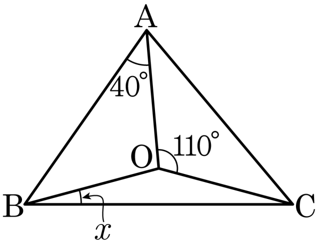
▷ **정답 :** 8 cm

해설

삼각형의 외심에서 꼭짓점까지의 거리는 외접원의 반지름과 같고, 직각삼각형의 외심은 빗변의 중심에 있으므로 빗변의 길이는 외접원의 반지름의 두 배이다.

따라서 $2 \times 4 = 8(\mathrm{cm})$ 이다.

3. 다음 $\triangle$ ABC 의 외심을 O 라고 할 때, $\angle x$ 의 크기는?

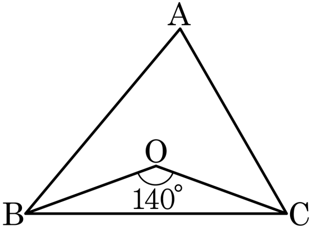


① $10°$ ② $15°$ ③ $20°$ ④ $25°$ ⑤ $30°$

해설

$\triangle AOC$ 에서 $\angle OAC = \angle OCA$, $\angle AOC + \angle OAC + \angle OCA = 180°$
, $\angle OCA = 35°$
$\angle OAB + \angle OCA + \angle x = 90°$, $\angle x = 90° - 40° - 35° = 15°$

4. 다음 그림에서 점 O 는 $\triangle ABC$ 의 외심이다.
$\angle BOC = 140°$일 때, $\angle BAC$를 구하여라.



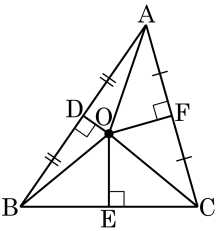
▶ 답 : ______ °

▷ 정답 : 70 °

해설

$$\angle BAC = \angle BOC \times \frac{1}{2} = 140 \times \frac{1}{2} = 70°$$

5. 다음 그림을 보고, 다음 중 크기가 같은 것끼리 묶은 것이 아닌 것은?



① $\overline{AO} = \overline{OC}$

② $\overline{AF} = \overline{CF}$

③ $\angle OEB = \angle OEC$

④ $\angle OBE = \angle OCE$

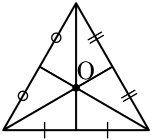
⑤ $\angle DOB = \angle FOC$

해설

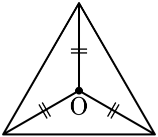
$\angle DOB = \angle DOA$ 이고 $\angle FOC = \angle FOA$ 이다.

6. 다음 중 점 O 가 삼각형의 외심에 해당하는 것을 모두 고르면?

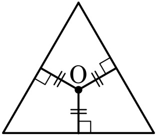
①



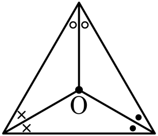
②



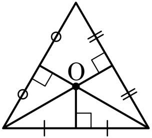
③



④



⑤

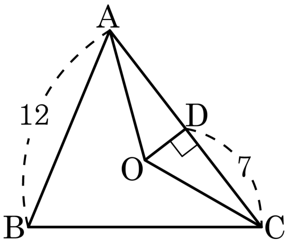


해설

내심 ③,④

외심 ②,⑤

7. 다음 그림에서 점 O는 $\triangle ABC$의 외심이다. 점 O에서 $\overline{AC}$에 내린 수선의 발을 D라 할 때, $\overline{AD}$의 길이는?

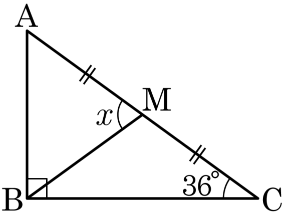


① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

외심에서 각 변에 내린 수선의 발은 각 변을 수직이등분하므로 $\overline{AD} = \overline{CD}$이다.
따라서 $\overline{AD} = 7$이다.

8. 다음 그림과 같은 직각삼각형 ABC 에서 빗변 AC 의 중점은 M 이고 $\angle ACB = 36^\circ$ 일 때 $\angle AMB$ 의 크기는?



① 62° ② 64° ③ 68° ④ 70° ⑤ 72°

해설

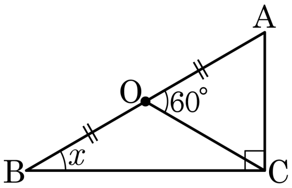
직각삼각형의 외심은 빗변의 중점이므로 $\overline{AM} = \overline{CM} = \overline{BM} \cdots$ ㉠

따라서 $\triangle BMC$ 는 이등변삼각형이다.

$\angle MCB = \angle MBC = 36^\circ$

$\angle AMB = \angle MCB + \angle MBC = 36^\circ + 36^\circ = 72^\circ$

9. 다음 그림과 같이 $\angle C = 90°$ 인 직각삼각형 ABC 의 빗변 AB 의 중점을 O 라 하자. $\angle AOC = 60°$ 일 때, $\angle x$ 의 크기는?



① $10°$ ② $20°$ ③ $30°$ ④ $40°$ ⑤ $50°$

해설

직각삼각형의 외심은 빗변의 중점이므로 $\overline{AO} = \overline{CO} = \overline{BO}$

$\overline{BO} = \overline{CO}$ 이므로 $\triangle BOC$ 는 이등변삼각형이다.

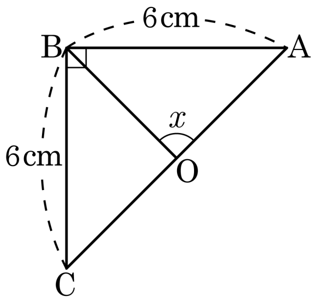
따라서 $\angle OCB = \angle B = x$

삼각형의 한 외각의 크기는 두 내각의 합과 같으므로

$x + x = 60°$

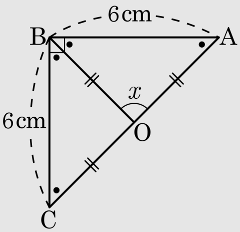
$\therefore x = 30°$

10. 다음 그림의 직각삼각형 ABC 에서 점 O 가 빗변의 중점일 때, $\angle x$ 의 크기를 구하면?



① 70° ② 75° ③ 80° ④ 85° ⑤ 90°

해설



$\triangle ABC$ 는 직각이등변삼각형

$\angle BCA = \angle BAC$ 이고, $\angle B = 90^\circ$ 이므로

$\angle BCA = \angle BAC = 45^\circ$

직각삼각형 $\triangle ABC$ 의 점 O 가 빗변의 중점이므로 $\triangle ABC$ 의 외심이다.

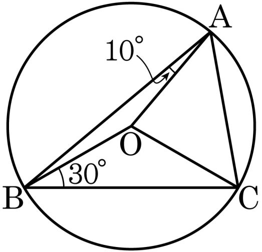
$\therefore \overline{OC} = \overline{OB} = \overline{OA}$

$\triangle OAB$ 가 이등변삼각형이므로 $(\because \overline{OA} = \overline{OB})$

$\angle OAB = \angle OBA = 45^\circ$

따라서 $\angle AOB = 90^\circ$ 이다.

11. 다음 그림에서 점 O는 $\triangle ABC$의 외심이다. $\angle OAB = 10°$, $\angle OBC = 30°$, $\angle OAC$의 크기는?



① $40°$ ② $45°$ ③ $50°$ ④ $55°$ ⑤ $60°$

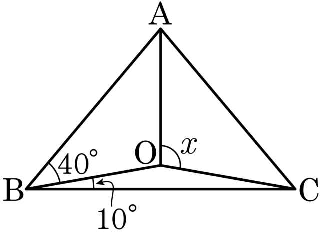
해설

$\angle OAB = \angle OBA$, $\angle OBC = \angle OCB$, $\angle OAC = \angle OCA$ 이므로

$\angle OAB + \angle OBC + \angle OCA = 90°$

$\therefore \angle OAC = \angle OCA = 90° - 40° = 50°$

12. 다음 그림에서 점 O가 삼각형 ABC의 외심일 때, $\angle x$의 크기를 구하여라.



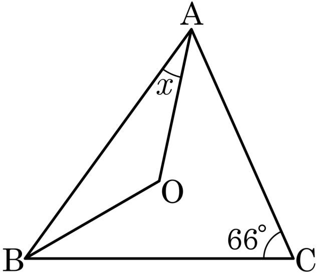
▶ 답 : ____°

▷ 정답 : 100°

해설

$\angle x = 50° \times 2 = 100°$

13. 다음 그림에서 점 O 는 $\triangle ABC$ 의 외심이다. $\angle ACB = 66°$ 일 때 $\angle BAO$ 의 크기는?



① 16° ② 20° ③ 24° ④ 30° ⑤ 33°

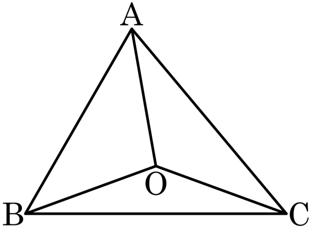
해설

$\angle AOB = 66° \times 2 = 132°$

$\overline{OA} = \overline{OB}$ 이므로 $\triangle ABO$ 에서 $2x + 132° = 180°$

$\therefore \ x = 24°$

14. 다음 그림의 $\triangle ABC$ 에서 점 O는 외심이고 $\angle AOB : \angle COA : \angle BOC = 5 : 6 : 7$ 일 때, $\angle ACB$ 의 크기를 구하면?

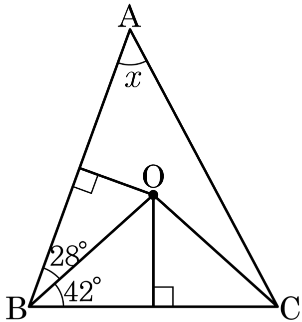


① 40° ② 50° ③ 60° ④ 70° ⑤ 80°

해설

$$\angle ACB = 360° \times \frac{5}{(5+6+7)} \times \frac{1}{2} = 50°$$

15. 다음 그림에서 점 O 가 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ 의 수직이등분선의 교점일 때, $\angle x$ 의 크기를 구하여라.



▶ 답 : ____°

▷ 정답 : 48°

해설

보조선 $\overline{OA}$ 를 그으면

$\triangle OAB$ 가 이등변삼각형이므로 $\angle OAB = 28°$

$\triangle OBC$ 가 이등변삼각형이므로 $\angle OCB = 42°$

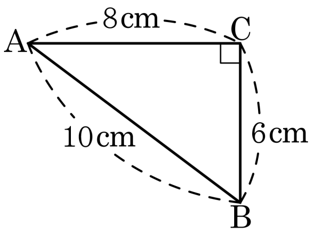
$\therefore \angle BOC = 96°$, $\angle AOB = 124°$, $\angle AOC = 140°$

$\angle OAC = \angle OCA$ 이고 삼각형의 세 내각의 합이 $180°$ 이므로

$\angle OAC = \angle OCA = 20°$

따라서 $x = 28° + 20° = 48°$ 이다.

16. 다음 그림과 같은 직각삼각형에서 $\overline{AB} = 10\text{cm}$, $\overline{BC} = 6\text{cm}$, $\overline{AC} = 8\text{cm}$ 일 때, $\triangle ABC$ 의 외접원의 넓이는?



① $36\pi\text{cm}^2$ ② $25\pi\text{cm}^2$ ③ $22\pi\text{cm}^2$

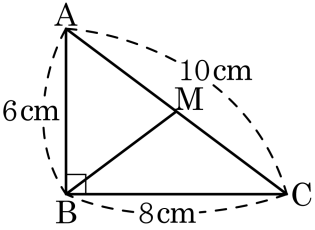
④ $20\pi\text{cm}^2$ ⑤ $16\pi\text{cm}^2$

해설

외접원의 반지름은 빗변의 길이의 반이므로 $\frac{10}{2} = 5(\text{cm})$

따라서 넓이는 $\pi \times 5^2 = 25\pi(\text{cm}^2)$ 이다.

17. 다음 그림은 $\angle B$가 직각인 삼각형이다. 점 M이 $\triangle ABC$의 외심이고, $\overline{AB} = 6\text{cm}$, $\overline{BC} = 8\text{cm}$, $\overline{CA} = 10\text{cm}$일 때, $\triangle MBC$의 넓이는?



① 10cm^2 ② 12cm^2 ③ 13cm^2

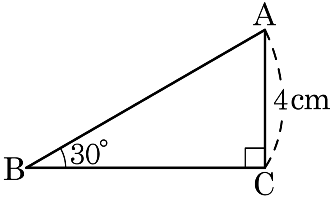
④ 15cm^2 ⑤ 16cm^2

해설

직각삼각형의 외심은 빗변의 중심이므로 $\overline{MB}$는 $\triangle ABC$의 넓이를 이등분한다.

$$\therefore \triangle MBC = \left(6 \times 8 \times \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2} = 12(\text{cm}^2)$$

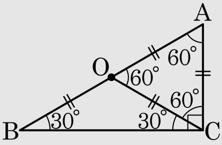
18. 다음 그림에서 $\triangle ABC$는 $\angle C = 90°$인 직각삼각형이다. $\overline{AC} = 4\text{cm}$, $\angle B = 30°$일 때, $\overline{AB}$의 길이는?



① 4cm ② 6cm ③ 8cm ④ 10cm ⑤ 12cm

해설

직각삼각형의 외심은 빗변의 중점에 위치하므로 외심을 $\overline{AB}$의 중점 O라 하면

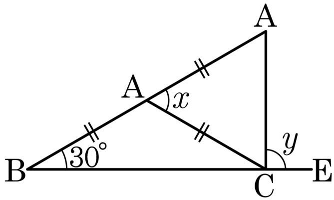


$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$이므로

$\angle AOC = \angle OCA = \angle A = 60°$

$\therefore\ \overline{AB} = \overline{AO} + \overline{BO} = 8(\text{cm})$

19. 다음 그림에서 $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD}$, $\angle ABC = 30°$ 일 때, $\angle x + \angle y$ 의 크기를 구하여라.



① 150°　② 160°　③ 170°　④ 180°　⑤ 190°

해설

$\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD}$ 이므로 빗변의 중점인 점 A 는 직각삼각형의 외심이다.

$\overline{AB} = \overline{AC}$ 이므로 $\triangle ABC$ 는 이등변삼각형

$\therefore \angle ACB = \angle ABC = 30°$

삼각형의 외각의 성질에 의해 $\angle DAC = \angle ACB + \angle ABC = 30° + 30° = 60°$

$\therefore \angle x = 60° \cdots$ ㉠

$\overline{CA} = \overline{AD}$ 이므로

$\triangle ACD$ 는 이등변삼각형

$\therefore \angle ACD = \angle CDA = 60°$ ($\because$ ㉠)

세 내각의 크기가 같으므로 삼각형 ACD 는 정삼각형이다.

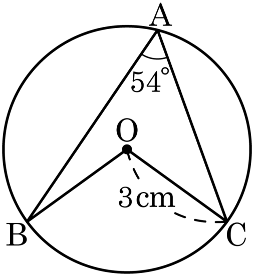
$\angle DCB = \angle ACD + \angle ACB = 60° + 30° = 90°$

$\angle DCE = 90°$ 이다.

$\therefore \angle y = 90° \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의해서 $\angle x + \angle y = 60° + 90° = 150°$

20. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 3cm 인 원 O 에서 $\angle BAC = 54°$ 일 때, 색칠한 부분의 넓이를 구하여라.



▶ 답 : ______ cm^2

▷ 정답 : 6.3π cm^2

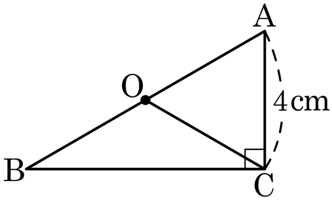
해설

점 O 는 $\triangle ABC$ 의 외심이므로
$\angle BOC = 2\angle A = 108°$
(색칠한 부분의 넓이)

$$= \pi \times 3^2 \times \frac{252°}{360°}$$

$$= 6.3\pi(cm^2)$$

21. 다음 그림과 같이 직각삼각형 ABC의 외심이 점 O일 때, $\overline{AB}+\overline{AC}=$ 12cm이면 $\angle ABC$ 의 크기는?



① $10°$ ② $20°$ ③ $30°$

④ $40°$ ⑤ 알 수 없다.

해설

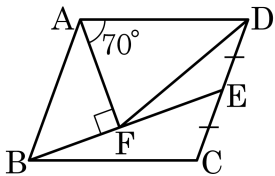
$\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{AC}=12\text{cm}$ 이고

$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$ 이므로 $\overline{OA}=\overline{OC}=\overline{AC}=4\text{cm}$ 이다.

따라서 $\triangle AOC$는 정삼각형이므로 $\angle OAC=60°$

$\therefore\ \angle ABC=30°$

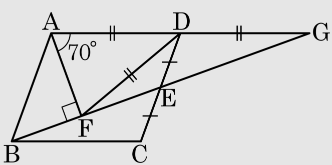
22. 다음 그림의 평행사변형 ABCD 에서 변 CD 의 중점을 E 라 하고, 점 A 에서 $\overline{\mathrm{BE}}$ 에 내린 수선의 발을 F 라고 한다. $\angle \mathrm{DAF} = 70°$ 라고 할 때, $\angle \mathrm{DFE} = (\quad)°$ 이다. ( ) 안에 들어갈 알맞은 수를 구하여라.



▶ 답:

▷ 정답: 20

해설



$\overline{\mathrm{AD}}$ 의 연장선과 $\overline{\mathrm{BE}}$ 의 연장선의 교점을 G 라 하면

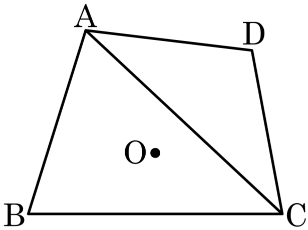
$\triangle \mathrm{BCE} \equiv \triangle \mathrm{GDE}$(ASA 합동) 이므로 $\overline{\mathrm{BC}} = \overline{\mathrm{GD}}$,

$\triangle \mathrm{AFG}$ 는 직각삼각형이고 $\overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{BC}} = \overline{\mathrm{GD}}$ 이므로 점 D 는 빗변 AG 의 중점이다.

직각삼각형에서 빗변의 중점은 외심이므로 $\overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{DG}} = \overline{\mathrm{DF}}$

$\therefore \angle \mathrm{DFE} = 90° - \angle \mathrm{DFA} = 90° - \angle \mathrm{DAF} = 20°$

23. 다음 그림에서 삼각형 ABC 와 ACD 의 외심은 점 O 로 같은 점이다. $\angle ABC + \angle ADC$ 의 값을 구하여라.



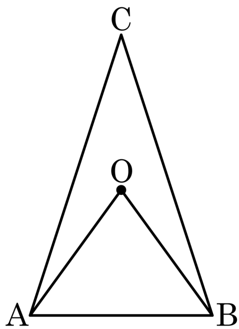
▶ 답 : $\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad {}^\circ}$

▷ 정답 : $\underline{180^\circ}$

해설

$\angle ABC = x$, $\angle ADC = y$ 라 하면
점 O 가 $\triangle ABC$ 의 외심이므로 $\triangle OAB$, $\triangle OBC$, $\triangle OCA$ 는 모두 이등변삼각형
$\angle OAB + \angle OCB = \angle OBA + \angle OBC = x$
$\therefore\ \angle AOC = 2x$
점 O 가 $\triangle ACD$ 의 외심이므로 $\triangle OAD$, $\triangle ODC$ 도 이등변삼각형
$\angle OAD = \angle ODA,\ \angle ODC = \angle OCD$
$\square AOCD$ 에서
$\angle OAD + \angle ODA + \angle ODC + \angle OCD + \angle AOC = 360^\circ$ 이므로
$2(\angle ODA + \angle ODC) = 360^\circ - \angle AOC$
$2y = 360^\circ - 2x,\ x + y = 180^\circ$
$\therefore\ \angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$

24. $\triangle$ABC 의 외심을 O 라 하고 $\angle A + \angle B : \angle C = 4 : 1$ 일 때, $\angle$AOB 의 크기를 구하여라.



▶ 답 : $\underline{\quad\quad}\,^\circ$

▷ 정답 : $\underline{72}\,^\circ$

해설

$\angle OAB = \angle OBA = x$, $\angle OBC = \angle OCB = y$, $\angle OCA = \angle OAC =$ z 라고 하면

$2x + 2y + 2z = 180\,^\circ$, $x + y + z = 90^\circ \cdots$ ㉠

또한, $\angle A + \angle B = 4\angle C$ 이므로

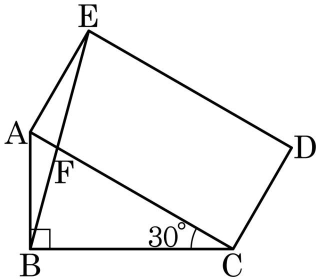
$x + z + x + y = 4(y + z) \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $x = 54\,^\circ$

$\triangle$AOB 는 $\overline{OA} = \overline{OB}$ 인 이등변삼각형이므로

$\angle AOB = 180\,^\circ - (54\,^\circ \times 2) = 72\,^\circ$

25. 다음 그림에서 $\triangle ABC$ 는 $\angle B = 90°$ 인 직각삼각형이고, $\square ACDE$ 는 직사각형이다. $\overline{AE} = \frac{1}{2}\overline{AC}$, $\angle ACB = 30°$ 일 때, $\angle DEF$ 와 $\angle EFC$ 의 크기의 차를 구하여라.



▶ 답 : ____°

▷ 정답 : 30°

해설

$\overline{AC}$ 의 중점 O 를 잡으면 점 O 는 $\triangle ABC$ 의 외심으로 $\overline{AE} = \overline{AO} = \overline{OC} = \overline{OB}$ 이다.

$\angle BAC = 60°$ 이므로

$\angle EAB = 60° + 90° = 150°$

$\angle ABE = \angle AEB = (180° - 150°) \div 2 = 15°$

$\angle DEF = 90° - 15° = 75°$

$\angle EFC = 90° + 15° = 105°$

$\therefore \angle EFC - \angle DEF = 105° - 75° = 30°$