

1. $\frac{2x+1}{x^3-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$ 가 $x \neq 1$ 인 모두 실수 x 에 대해 항상 성립 하도록 a, b, c 를 구할 때, $a+b+c$ 의 값은?

① 2 ② -2 ③ 1 ④ -1 ⑤ 0

해설

우변의 분모를 통분하면

$$\frac{a(x^2+x+1) + (bx+c)(x-1)}{x^3-1}$$

$$= \frac{(a+b)x^2 + (a-b+c)x + (a-c)}{x^3-1}$$

$$\therefore \frac{2x+1}{x^3-1} = \frac{(a+b)x^2 + (a-b+c)x + (a-c)}{x^3-1}$$

분자의 계수를 비교하면

$$a+b=0, a-b+c=2, a-c=1$$

세 식을 연립하여 풀면 $a=1, b=-1, c=0$

$$\therefore a+b+c=0$$

2. a, b 는 정수이고, $ax^3 + bx^2 + 1$ 이 $x^2 - x - 1$ 로 나누어 떨어질 때, b 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

전개했을 때 양변의 최고차항과 상수항이 같아야 하므로

$$ax^3 + bx^2 + 1$$

$$= (x^2 - x - 1)(ax - 1)$$

$$= ax^3 - (1+a)x^2 + (1-a)x + 1$$

양변의 계수를 비교하면

$$-(1+a) = b, 1-a = 0$$

$$\therefore a = 1, b = -2$$

3. 등식 $(2k+1)y - (k+3)x + 10 = 0$ 이 k 의 값에 관계없이 항상 성립하도록 하는 상수 x, y 에 대하여 $x+y$ 의 값은?

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

$$(\text{준식}) = (y - 3x + 10) + (2y - x)k = 0$$

$$\therefore 2y = x, y - 3x = -10$$

$$\therefore x = 4, y = 2$$

$$\therefore x + y = 6$$

4. x 에 대한 다항식 $x^3 + ax^2 + bx + 3$ 이 $x^2 + 1$ 로 나누어떨어질 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x^3 + ax^2 + bx + 3 = (x^2 + 1)(x + k)$ 라 할 수 있다.
여기에서 상수항을 비교하면 $k = 3$
 $x^3 + ax^2 + bx + 3 = (x^2 + 1)(x + 3)$
 $= x^3 + 3x^2 + x + 3$
 $\therefore a = 3, b = 1$ 이므로 $a + b = 4$

해설

$x^3 + ax^2 + bx + 3 = (x^2 + 1)Q(x)$
 $x^2 = -1$ 을 대입하면
 $-x - a + bx + 3 = 0, (b - 1)x + (3 - a) = 0$
 x 에 대한 항등식이므로
 $a = 3, b = 1$
 $\therefore a + b = 4$

5. 임의의 실수 x 에 대하여 등식 $2x^3 - 3x^2 - x + 1 = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$ 가 성립할 때, $a + b + c + d$ 의 값은? (단, a, b, c, d 는 상수)

- ① -3
- ② -1
- ③ 0
- ④ 3
- ⑤ 5

해설

계수의 합 $a + b + c + d$ 를 구할 때는 우변의 문자부분을 모두 1이 되게 하는 x 값을 양변에 대입하면 간단하게 그 값을 구할 수 있다.

이 문제에서는 $x = 2$ 를 양변에 대입하면

$$16 - 12 - 2 + 1 = a + b + c + d$$

$$\therefore a + b + c + d = 3$$

해설

a, b, c, d 의 값을 각각 구하기 위해서는 아래와 같이 조립제법을 사용할 수 있다.

$$a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$$

$$= (x-1)[(x-1)\{a(x-1) + b\} + c] + d$$

즉, $x-1$ 로 연속으로 나눌 때 나오는 나머지가 순서대로 d, c, b 가 되고 마지막 몫이 a 이다.

1		2	-3	-1	1	
		2	-1	-2		
1		2	-1	-2	-1	← d
		2	1			
1		2	1	-1	←	c
		2				
		2	3	←	b	
		↑				
		a				

$$\therefore a + b + c + d = 3$$

6. 임의의 실수 x 대하여 $(1+2x-x^2)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{20}x^{20}$ 이 항상 성립할 때, $2a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{20}$ 의 값은?

① 1023 ② 1024 ③ 1025 ④ 2046 ⑤ 2050

해설

$x = 0$ 대입, $a_0 = 1$

$x = 1$ 대입, $2^{10} = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{20}$

$2a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{20} = 1 + 1024 = 1025$

7. x^4 을 $x + \frac{1}{2}$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R_1 이라 하자. R_1 을 구하고, 이 때, $Q(x)$ 를 $x - \frac{1}{2}$ 로 나누었을 때의 몫 $Q_1(x)$ 을 구하면?

- ① $R_1 = \frac{1}{16}$, $Q_1(x) = (x - \frac{1}{2})(x^2 + \frac{1}{4})$
 ② $R_1 = \frac{1}{16}$, $Q_1(x) = (x + \frac{1}{2})(x^2 + \frac{1}{4})$
 ③ $R_1 = \frac{1}{16}$, $Q_1(x) = (x^2 - \frac{1}{4})$
 ④ $R_1 = \frac{1}{16}$, $Q_1(x) = x^2 + \frac{1}{4}$
 ⑤ $R_1 = \frac{1}{16}$, $Q_1(x) = x + \frac{1}{2}$

해설

$$x^4 = \left(x + \frac{1}{2}\right) Q_1(x) + R_1$$

- (1) 양변에 $x = -\frac{1}{2}$ 을 대입하면

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^4 = R_1 \quad \therefore R_1 = \frac{1}{16}$$

- (2) $x^4 = \left(x + \frac{1}{2}\right) Q_1(x) + \frac{1}{16}$ 이므로

$$x^4 - \frac{1}{16} = \left(x + \frac{1}{2}\right) Q_1(x)$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right) \left(x - \frac{1}{2}\right) \left(x^2 + \frac{1}{4}\right)$$

$$= \left(x + \frac{1}{2}\right) Q_1(x)$$

$$Q_1(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) \left(x^2 + \frac{1}{4}\right)$$

$$\therefore \text{구하는 몫은 } x^2 + \frac{1}{4}$$

8. 다항식 $f(x)$ 를 $x-3, x-4$ 로 나눈 나머지가 각각 3, 2이고, 다항식 $f(x+1)$ 을 x^2-5x+6 으로 나눈 나머지를 $R(x)$ 라 할 때, $R(1)$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$f(3) = 3, f(4) = 2$$

$$R(x) = ax + b \text{라 하면}$$

$$f(x+1) = (x-2)(x-3)Q(x) + ax + b$$

$$x = 2 \text{ 대입,}$$

$$f(3) = 2a + b = 3$$

$$x = 3 \text{ 대입,}$$

$$f(4) = 3a + b = 2$$

$$a = -1, b = 5$$

$$R(x) = -x + 5,$$

$$R(1) = -1 + 5 = 4$$

9. 다항식 $f(x)$ 를 $x-2$, $x-3$ 으로 나눌 때의 나머지가 각각 3, 7이라고 할 때, $f(x)$ 를 $(x-2)(x-3)$ 으로 나눌 때의 나머지는?

① $2x+3$

② $3x-4$

③ $4x-5$

④ $5x+6$

⑤ $6x-7$

해설

$$f(x) = (x-2)Q_1(x) + 3, f(2) = 3$$

$$f(x) = (x-3)Q_2(x) + 7, f(3) = 7$$

$$f(x) = (x-2)(x-3)Q_3(x) + ax + b$$

$$f(2) = 2a + b = 3, f(3) = 3a + b = 7 \text{ 이다.}$$

$$\text{연립하면 } a = 4, b = -5$$

$$\therefore \text{나머지는 } 4x - 5$$

10. x 에 대한 다항식 $2x^3 - 5x^2 + ax + b$ 가 다항식 $x^2 - x + 2$ 로 나누어떨어지도록 상수 a, b 의 값을 정하면?

- ① $a = 7, b = -6$ ② $a = 6, b = -5$ ③ $a = 5, b = -3$
④ $a = 4, b = -5$ ⑤ $a = 3, b = 7$

해설

직접 나누면

몫이 $2x - 3$, 나머지가 $(a - 7)x + b + 6$ 이므로

$$2x^3 - 5x^2 + ax + b$$

$$= (x^2 - x + 2)(2x - 3) + (a - 7)x + b + 6$$

$x^2 - x + 2$ 로 나누어떨어지기 위해서는 나머지가 0이어야 하므로

$$(a - 7)x + b + 6 = 0$$

$$\therefore a = 7, b = -6$$

11. 삼차항의 계수가 1인 삼차식 $f(x)$ 에 대하여 $f(1) = f(2) = f(3) = 3$ 이 성립할 때, $f(0)$ 의 값은?

① -6 ② -4 ③ -3 ④ 1 ⑤ 3

해설

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 라고 두면,

$$f(1) = 1 + a + b + c = 3$$

$$f(2) = 8 + 4a + 2b + c = 3$$

$$f(3) = 27 + 9a + 3b + c = 3$$

세 식을 연립하여 풀면

$$a = -6, b = 11, c = -3$$

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 3$$

$$\therefore f(0) = -3$$

해설

$f(1) = f(2) = f(3) = 3$ 이므로

$$f(x) - 3 = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

$$f(0) - 3 = -1 \times (-2) \times (-3) = -6$$

$$\therefore f(0) = -3$$

12. $x + y + z = 0$, $2x - y - 7z = 3$ 을 동시에 만족시키는 x, y, z 에 대하여 $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ 이 성립할 때, $a + b + c$ 의 값을 구하면?

① 11

② 8

③ 7

④ 6

⑤ 4

해설

(i) $x + y + z = 0$, $2x - y - 7z = 3$ 에서

x, y 를 z 에 대하여 나타내면

$$x = 2z + 1, y = -3z - 1$$

(ii) $x = 2z + 1$, $y = -3z - 1$ 을 $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ 에 대입하여 정리하면

$$(4a + 9b + c)z^2 + 2(2a + 3b)z + (a + b - 1) = 0$$

$$\therefore 4a + 9b + c = 0, 2a + 3b = 0, a + b - 1 = 0$$

$$\therefore a = 3, b = -2, c = 6$$

$$\therefore a + b + c = 7$$

13. x^{30} 을 $x-3$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 이라 할 때, $Q(x)$ 의 상수항을 포함한 모든 계수들의 합을 구하면?

- ① $3^{30} + 1$ ② $3^{30} - 1$ ③ $\frac{1}{2}(3^{30} - 1)$
④ $\frac{1}{3}(3^{30} - 1)$ ⑤ 0

해설

$$x^{30} = (x-3)Q(x) + R$$

양변에 $x=3$ 을 대입 하면, $3^{30} = R$

$$x^{30} = (x-3)Q(x) + 3^{30}$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면, $1 = -2Q(1) + 3^{30}$

$$\therefore Q(1) = \frac{1}{2}(3^{30} - 1)$$

※ 다항식에서 상수항을 포함한 모든 계수의 합은 문자대신 1을 대입한 값과 같다.

14. 임의의 실수 x 에 대하여 $x^{11} + x = a_0 + a_1(x+3) + a_2(x+3)^2 + \cdots + a_{11}(x+3)^{11}$ 이 성립할 때, $a_1 + a_3 + \cdots + a_{11}$ 의 값은?

- ① $2^{22} - 2^{11} + 2$ ② $2^{22} + 2^{11} - 2$ ③ $2^{21} - 2^{10} + 1$
④ $2^{21} + 2^{10} - 1$ ⑤ $2^{21} + 2^{10} + 1$

해설

주어진 식의 양변에 $x = -2$, $x = -4$ 를 각각 대입하면

$$-2^{11} - 2 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{11} \cdots \textcircled{1}$$

$$-2^{22} - 4 = a_0 - a_1 + a_2 + \cdots - a_{11} \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{에서 } 2(a_1 + a_3 + \cdots + a_{11}) = 2^{22} - 2^{11} + 2$$

$$\therefore a_1 + a_3 + \cdots + a_{11} = 2^{21} - 2^{10} + 1$$

15. x 에 대한 항등식 $x^{1997} + x + 1$ 을 $x^2 - 1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 할 때, $Q(x)$ 의 모든 계수와 상수항의 합을 구하면?

- ① 997 ② 998 ③ 1997 ④ $\frac{1997}{2}$ ⑤ $\frac{1997}{3}$

해설

$x^{1997} + x + 1 = (x^2 - 1)Q(x) + ax + b$ 라 하면
 $x = 1$ 일 때, $3 = a + b$
 $x = -1$ 일 때, $-1 = -a + b$
 $\therefore a = 2, b = 1$
 $\therefore x^{1997} + x + 1 = (x^2 - 1)Q(x) + 2x + 1$
 $x^{1997} - x = (x^2 - 1)Q(x)$
 $x(x - 1)(x^{1995} + x^{1994} + \cdots + x + 1)$
 $= (x - 1)(x + 1)Q(x)$
 $\therefore x(x^{1995} + x^{1994} + \cdots + x + 1) = (x + 1)Q(x)$
 $Q(1)$ 이 $Q(x)$ 의 모든 계수의 합이므로 $x = 1$ 을 대입하면
 $2Q(1) = 1996 \quad \therefore Q(1) = \frac{1996}{2} = 998$