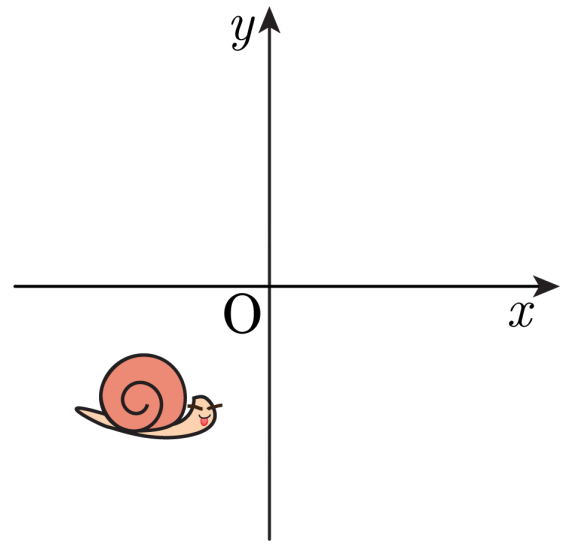
1. 직교좌표계를 사용했을 때, 달팽이의 현재 위치는 $(-10, -10)$ 이다. 이 달팽이는 x 축 방향으로 2 , y 축 방향으로 2 만큼 평행이동 하는데 1 분이 걸린다고 한다. 이 달팽이가 원점에 도달하는데 걸린 시간은 몇 분인지 구하여라.



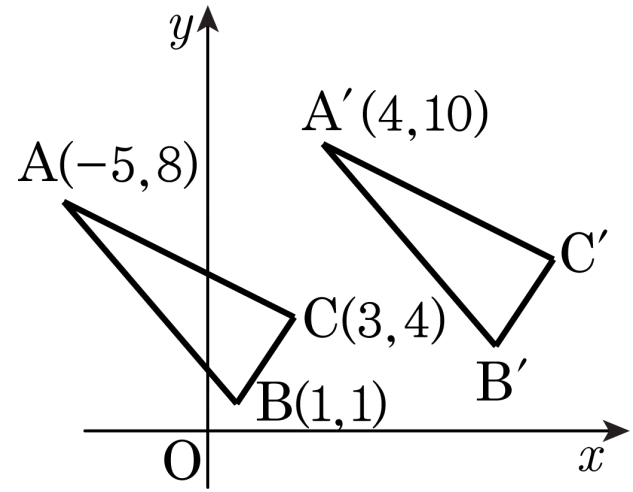
▶ 답 : 분

▷ 정답 : 5분

해설

달팽이가 x 축 방향으로 2 , y 축 방향으로 2 만큼 평행이동하는데 1 분이 걸린다.
즉, $(-10, -10)$ 에서 $(-8, -8)$ 까지 가는데 1 분,
$(-6, -6)$ 까지 가는데 2 분, 같은 식으로 하면
원점에 도달하는데 총 5 분이 걸린다.

2. 다음 그림의 삼각형 $A'B'C'$ 은 삼각형 ABC 를 평행이동한 도형이다. 두 점 B', C' 을 지나는 직선의 방정식이 $ax + by = 24$ 일 때, $a + b$ 의 값은? (단, a , b 는 상수)



① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

해설

$\triangle A'B'C'$ 는 $\triangle ABC$ 를 x 축 방향으로 9 만큼, y 축 방향으로 2 만큼 평행이동한 도형이므로 $B'(10,\ 3)$, $C'(12,\ 6)$ 이다.
두 점 B', C' 를 지나는 직선의 방정식은

$$y - 3 = \frac{6-3}{12-10}(x - 10)$$

$3x - 2y = 24$,

$\therefore a + b = 1$

3. 평행이동 $(x,\ y) \to (x+a,\ y+b)$ 에 의하여 점 $(2,\ 1)$ 이 점 $(1,\ -1)$ 로 옮겨질 때, $(0,\ 0)$ 는 어느 점으로 옮겨지는가?

① $(1,\ 2)$ ② $(-1,\ 2)$ ③ $(1,\ -2)$

④ $(-1,\ -2)$ ⑤ $(2,\ 1)$

해설

점 $(2,\ 1)$ 이 점 $(1,\ -1)$ 로 옮겨지면, x 축 방향으로 -1, y 축 방향으로 -2 만큼 평행이동 하므로 $(0-1,\ 0-2) = (-1,\ -2)$ 로 이동한다.

4. 직선 $3x+4y-5=0$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행 이동시켰을 때, 이 직선의 y절편의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ 3 ④ $-\frac{1}{4}$ ⑤ -8

해설

x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동하므로 $3(x-2)+4(y+3)-5=0$으로 이동한다.

이 직선의 y절편은 $x=0$을 대입하면 $y=-\frac{1}{4}$

5. 좌표평면에서 점 $(3,-1)$을 점 $(1,2)$로 옮기는 평행이동에 의해 원 $x^2+y^2+ax+by+c=0$은 원 $x^2+y^2=1$로 옮겨진다. 이 때, 상수 a,b,c의 합 $a+b+c$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 14

해설

점 $(3,-1)$을 점 $(1,2)$로 옮기는 평행이동은
x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.
$x^2+y^2+ax+by+c=0$에서
x 대신에 $x+2$를, y 대신에 $y-3$을 대입하면
$(x+2)^2+(y-3)^2+a(x+2)+b(y-3)+c=0$
정리하면
$x^2+y^2+(a+4)x+(b-6)y+2a-3b+c+13=0$
이 식과 $x^2+y^2=1$이 일치하므로
$a+4=0, b-6=0, 2a-3b+c+13=-1$
$\therefore a=-4,\ b=6,\ c=12$
$\therefore a+b+c=14$

해설

원 $x^2+y^2=1$을 x축의 방향으로 2 만큼,
y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동하면
$(x-2)^2+(y+3)^2=1$
전개하면 $x^2+y^2-4x+6y+12=0$
$\therefore a=-4,\ b=6,\ c=12$

6. 곡선 $y = x^2 - 2x$ 를 x 축의 방향으로 p 만큼 평행이동하여 곡선 $y = x^2 + ax - 1$ 을 얻었다. $a + p$ 의 값은?

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

곡선 $y = x^2 - 2x$ 를 x 축의 방향으로 p 만큼
평행 이동하면
$y = (x-p)^2 - 2(x-p) = x^2 - 2(p+1)x + p^2 + 2p$
이 곡선이 $y = x^2 + ax - 1$ 과 같으므로
$-2(p+1) = a$, $p^2 + 2p = -1$
$\therefore p = -1$, $a = 0$
$\therefore a + p = -1$

7. 원 $x^2+y^2+4x+6y+12=0$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면 원 $x^2+y^2-2x-4y+4=0$ 과 겹칠 때, a^2+b^2 의 값은?

① 25 ② 32 ③ 34 ④ 41 ⑤ 50

해설

$x^2+y^2+4x+6y+12=0$ 에서

$(x+2)^2+(y+3)^2=1 \cdots$ ㉠

$x^2+y^2-2x-4y+4=0$ 에서

$(x-1)^2+(y-2)^2=1 \cdots$ ㉡

㉠을 x 축의 방향으로 a 만큼,

y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면

$(x-a+2)^2+(y-b+3)^2=1$

이 원이 ㉡과 겹쳐지므로

$-a+2=-1$, $-b+3=-2$

$\therefore a=3$, $b=5$

$\therefore a^2+b^2=34$

8. 포물선 $y = x^2 + 3$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼 y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하여 꼭짓점의 좌표가 $(3,\ 7)$ 인 포물선을 얻을 수 있다. 이때, $b - a$ 의 값은?

① -1 ② 1 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

포물선 $y = x^2 + 3$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼,
y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면
$y - b = (x - a)^2 + 3$
$\therefore y = (x - a)^2 + b + 3$
이때, 꼭짓점의 좌표는 $(a, b + 3)$ 이므로
$a = 3, b + 3 = 7 \qquad \therefore b = 4$
$\therefore b - a = 4 - 3 = 1$

9. 원 $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 1 = 0$ 을 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동시킨 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구하면?

① $(-1, -1)$, $2\sqrt{3}$ ② $(0, 0)$, $3\sqrt{3}$ ③ $(1, 1)$, $4\sqrt{3}$

④ $(2, 2)$, $5\sqrt{3}$ ⑤ $(3, 3)$, $6\sqrt{3}$

해설

$x^2 + y^2 + 6x - 4y + 1 = 0$

$(x^2 + 6x + 9) + (y^2 - 4y + 4) = 12$

$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 12$

이 원의 중심의 좌표는 $(-3, 2)$ 이고

반지름의 길이는 $2\sqrt{3}$ 이다.

따라서, 이 원을 x 축의 방향으로 2 만큼,

y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동시켰을 때,

중심의 좌표는 $(-3 + 2, 2 - 3) = (-1, -1)$ 이고,

반지름의 길이는 변하지 않으므로 $2\sqrt{3}$ 이다.

10. 원 $x^2+y^2-6x+2y+1=0$ 을 한 직선 l 에 대하여 대칭이동하면 자기 자신이 된다고 할 때, 다음 중 직선 l 로 알맞은 것은?

① $y=2x+3$ ② $y=-2x+1$ ③ $y=x+3$

④ $y=-x+2$ ⑤ $y=3x-2$

해설

$x^2+y^2-6x+2y+1=0$ 에서

$(x-3)^2+(y+1)^2=9$

이 원이 직선 l 에 대하여 대칭이어야 하므로

직선 l 이 원의 중심 $(3,-1)$ 을 지나야 한다.

보기의 직선 중 $(3,-1)$ 을 지나는 것은 ④뿐이다.

11. 두 점 $\mathrm{A}(3,4), \mathrm{B}(2,5)$ 가 직선 $y=ax+b$ 에 대하여 대칭일 때, $a+b$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ -1 ④ 3 ⑤ 0

해설

중점이 $y=ax+b$ 위의 점이므로,

$\frac{9}{2} = a \cdot \frac{5}{2} + b \rightarrow 5a+2b=9$

선분AB 와 $y=ax+b$ 는 서로 수직이므로,

선분AB 의 기울기 : $\frac{4-5}{3-2} = -1$

따라서, $a=1$

$5 \cdot 1 + 2b = 9$

$\therefore\ 2b=4 \quad \therefore\ b=2$

$\therefore\ a+b=1+2=3$

12. $(3,\ 1)$ 의 직선 $y = 2x + 3$ 에 대한 대칭점을 $(a,\ b)$ 라 할 때, $a + b$ 는?

① $\frac{4}{5}$ ② 1 ③ $\frac{6}{5}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ 2

해설

점 $(a,\ b)$와 $(3,\ 1)$을 지나는 직선은 직선 $y = 2x+3$와 수직이다.

이 직선은 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ 로 나타낼 수 있다.

점 $(a,\ b)$는 이 직선 위의 점이므로

$\left(a, -\frac{1}{2}a + \frac{5}{2}\right)$ 와 같다.

$\left(a, -\frac{1}{2}a + \frac{5}{2}\right)$ 는 직선 $y = 2x + 3$ 과의 거리가

점 $(3,1)$ 과 직선 $y = 2x + 3$ 과의 거리와 같으므로

점과 직선 사이의 거리에서

$$\frac{|2 \cdot 3 + 3 - 1|}{\sqrt{5}} = \frac{\left|2a + 3 + \frac{1}{2}a - \frac{5}{2}\right|}{\sqrt{5}}$$

$|5a + 1| = 16$

$\therefore\ a = 3$ 또는 $-\frac{17}{5}$

$(3,\ 1)$의 대칭점이 $(a,\ b)$이므로 $a \neq 3$,

$a = -\frac{17}{5}$ 일 때, $b = \frac{21}{5}$

$\therefore\ a + b = \frac{4}{5}$

13. 좌표평면에서 한 점 $A(-1, 3)$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 후 다시 직선 $y = x$에 대하여 대칭이동하였더니 점 A와 일치하였다. 이 때, ab의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -16

해설

점 $A(-1, 3)$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b만큼 평행이동하면 $(-1 + a, 3 + b)$가 되고 다시 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동하면 $(3 + b, -1 + a)$ 가 된다.

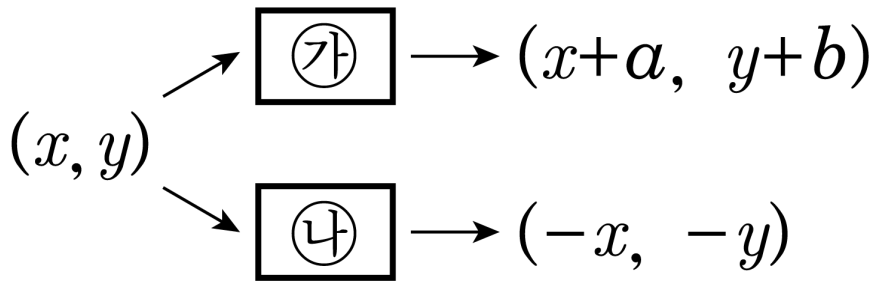
$(3 + b, -1 + a) = (-1, 3)$

$3 + b = -1,\ -1 + a = 3$

$a = 4,\ b = -4$

$\therefore ab = -16$

14. 다음과 같은 두 연산 장치 ㉮, ㉯가 있다.



원 $(x-3)^2+(y-4)^2=25$가 연산 장치 ㉮와 ㉯를 연속하여 통과하면서 원 $x^2+y^2=r^2$으로 출력되었다. 이때, $a^2+b^2+r^2$의 값은?

① 30 ② 35 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50

해설

원의 중심만 따로 생각한다.

$(3,4) \xrightarrow{\text{가}} (3+a,4+b) \xrightarrow{\text{나}} (-3-a,-4-b)$

$\Rightarrow \quad (-3-a,-4-b)=(0,0)$

$\therefore \quad a=-3, \quad b=-4, \quad r=5$

$a^2+b^2+r^2=50$

15. 원 $x^2+y^2=1$ 을 평행이동 $f:(x,y)\to(x-4,y+1)$ 에 의하여 옮긴 후 다시 직선 $y=-3$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 이라 할 때, $a+b+r$ 의 값은?

① 10 ② 5 ③ 0 ④ -5 ⑤ -10

해설

원의 중심을 이동시키면 된다

$(0,\ 0)\xrightarrow{f}(-4,\ 1)\xrightarrow{y=-3\text{대칭}}(-4,\ -7)$

$\therefore$ 이동된 원의 방정식 : $(x+4)^2+(y+7)^2=1$

$\Rightarrow\ a+b+r=-10$