1. 직선 $x+2y-3=0$ 을 x 축, y 축의 방향으로 각각 m , n 만큼 평행이동하면 처음 직선과 일치한다. 이 때 m , n 의 관계식으로 옳은 것은?

① $m+2n=0$　② $m+2n=1$　③ $2m+n=0$

④ $2m-n=0$　⑤ $2m-n\ 1$

해설

직선 $x+2y-3=0$ 을 x 축, y 축의 방향으로 각각 m , n 만큼 평행이동하면

$(x-m)+2(y-n)-3=0$

$\therefore x+2y-m-2n-3=0$

이 직선이 처음 직선 $x+2y-3=0$ 과 일치하므로

$-m-2n-3=-3$

$\therefore m+2n=0$

2. 좌표평면에서 점 $(3,-1)$을 점 $(1,2)$로 옮기는 평행이동에 의해 원 $x^2+y^2+ax+by+c=0$은 원 $x^2+y^2=1$로 옮겨진다. 이 때, 상수 a,b,c의 합 $a+b+c$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

점 $(3,-1)$을 점 $(1,2)$로 옮기는 평행이동은
x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.
$x^2+y^2+ax+by+c=0$에서
x 대신에 $x+2$를, y 대신에 $y-3$을 대입하면
$(x+2)^2+(y-3)^2+a(x+2)+b(y-3)+c=0$
정리하면
$x^2+y^2+(a+4)x+(b-6)y+2a-3b+c+13=0$
이 식과 $x^2+y^2=1$이 일치하므로
$a+4=0, b-6=0, 2a-3b+c+13=-1$
$\therefore a=-4,\ b=6,\ c=12$
$\therefore a+b+c=14$

해설

원 $x^2+y^2=1$을 x축의 방향으로 2 만큼,
y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동하면
$(x-2)^2+(y+3)^2=1$
전개하면 $x^2+y^2-4x+6y+12=0$
$\therefore a=-4,\ b=6,\ c=12$

3. 점 $(2,\ 3)$ 을 점$(1,\ 5)$ 로 옮기는 평행이동 T 에 의하여 직선 $y=ax+b$ 가 직선 $y=3x-2$ 로 옮겨질 때, 상수 a, b 의 곱 ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -21

해설

평행이동 T 에 의하여 점 $(2, 3)$ 이 점$(1, 5)$ 로 옮겨지므로

$T : (x, y) \to (x+m, y+n)$이라고 하면,

$(2, 3) \xrightarrow{T} (1, 5)$ 에서

$2+m=1, 3+n=5 \qquad \therefore m=-1, n=2$

$\therefore T : (x, y) \to (x-1, y+2)$

따라서, T 는 x 축의 방향으로 -1 만큼,

y 축의 방향으로 2 만큼 옮기는 평행이동이다.

한편, 평행이동 T 에 의하여 직선 $y=ax+b$ 가

옮겨지는 직선의 방정식은

$y-2=a(x+1)+b$

$\therefore y=ax+a+b+2 \cdots\cdots$ ㉠

이때, ㉠이 $y=3x-2$ 와 같아야 하므로

$a=3, a+b+2=-2$

$\therefore a=3, b=-7 \qquad \therefore ab=-21$

4. 원 $x^2+y^2=1$ 을 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동하면 직선 $y=x+3$ 과 접하게 될 때, 양수 m 의 값을 구하면?

① $2\sqrt{2}+1$ ② $\sqrt{2}+1$ ③ $\sqrt{2}$

④ $\sqrt{2}-1$ ⑤ $2\sqrt{2}-1$

해설

$x^2+y^2=1$ 을 x 축의 방향으로 m 만큼,
y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동하면
$(x-m)^2+(y-2)^2=1$ $\cdots\cdots$ ㉠
㉠이 직선 $x-y+3=0$ 과 접하므로
점 $(m,\ 2)$ 와 직선 $x-y+3=0$ 사이의 거리가 1 이다.

$$\frac{|m-2+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=1$$

이것을 풀면 $m=-1\pm\sqrt{2}$
$\therefore m=-1+\sqrt{2}$ $(\because m>0)$

5. 직선 l 을 x 축의 양의 방향으로 2 만큼, y 축의양의 방향으로 -1 만큼 평행이동 시켰더니 $x-2y-1=0$ 와 겹쳤다. 직선 l 의 방정식은?

① $x+y-1=0$ ② $x-2y+3=0$ ③ $2x+y-1=0$

④ $x-y+5=0$ ⑤ $x-2y+7=0$

해설

거꾸로 $x-2y-1=0$ 을 x 축으로 -2 , y 축으로 $+1$ 이동시키면, 직선 l 과 겹치게 된다.

$\Rightarrow\ (x+2)-2(y-1)-1=0$

$\Rightarrow\ x-2y+3=0\ \cdots\ l$

6. 포물선 $y = x^2$을 x축에 대하여 대칭이동한 후, y 축 방향으로 n만큼 평행이동하면 직선 $y = 2x + 3$에 접하게 된다. 이때, n의 값을 구하면?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{3}$

해설

포물선 $y = x^2$을 x축에 대하여 대칭이동하면

$y = -x^2$ $\cdots\cdots$ ㉠

포물선 ㉡을 y축 방향으로 n만큼 평행이동하면

$y - n = -x^2$ $\cdots\cdots$ ㉡

포물선 ㉡과 직선 $y = 2x + 3$이 접하여야 하므로

$x^2 + 2x + 3 - n = 0$에서 판별식

$\frac{D}{4} = 1 - (3 - n) = 0$ 이어야 하므로 $n = 2$

7. 점 $(a-4, a-2)$ 를 x 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 다음, $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점과 원점 사이의 거리가 2일 때, 처음 점의 좌표를 (p, q) 라 한다. p^2+q^2 의 값을 구하여라. (단, $a \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$(a-4, a-2) \to (a, a-2)$

(x 축으로 4만큼 평행이동)

$(a, a-2) \to (a-2, a)$

($y=x$ 에 대칭이동)

$(a-2, a)$ 와 원점 사이의 거리는

$\sqrt{(a-2)^2+a^2}=2$

$2a^2-4a+4=4$,

$\therefore a=2 \ \ (\because a \neq 0)$

처음 점의 좌표 $(a-4, a-2)$ 에 $a=2$ 를 대입하면

구하는 점의 좌표 $(p,\ q)=(-2,\ 0)$

$\therefore p^2+q^2=4$

8. 원 $x^2+y^2=4$을 평행이동 $f\ :\ (x,\ y)\ \rightarrow\ (x+3,\ y-2)$에 의하여 옮긴 후 다시 직선 y축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** $(x+3)^2+(y+2)^2=4$

해설

주어진 평행이동은 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이므로

$(x-3)^2+(y+2)^2=4$

다시 직선 y축에 대하여 대칭이동할 때는 x 대신 $-x$를 대입하면 된다.

$(-x-3)^2+(y+2)^2=4$

$\therefore\ (x+3)^2+(y+2)^2=4$

9. 점 $\mathrm{A}(a, b)$ 를 x 축의 방향으로 3 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 점을 다시 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 B 라고 하면 두 점 A, B 를 지나는 직선은 x 축에 평행하다. 이때, 선분 AB 의 길이는?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

점 $\mathrm{A}(a,\ b)$ 를 x 축의 방향으로 3 만큼,
y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 점을
A' 라고 하면 $\mathrm{A}'(a+3, b+2)$
다시 점 A' 을 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한
점 B 는 $\mathrm{B}(b+2, a+3)$
이때, 직선 AB 가 x 축에 평행하므로
두 점 A, B 의 y 좌표가 서로 같다.
즉, $b = a+3$ $\quad\therefore \mathrm{B}(a+5, a+3)$
따라서, 선분 AB 의 길이는
두 점 A, B 의 y 좌표의 차와 같으므로
$\overline{\mathrm{AB}} = (a+5) - a = 5$

10. 점 $(1, -2)$를 지나는 직선을 점$(2,\ 3)$에 대하여 대칭이동한 후 x축에 대하여 대칭이동 하였더니 점 $(4, -4)$를 지난다고 한다. 처음 직선의 방정식을 구하면?

① $y = -4x + 2$ ② $y = 4x + 2$ ③ $y = -4x + 4$

④ $y = 4x + 4$ ⑤ $y = -4x + 6$

해설

$(1, -2)$ 를 지나는 직선의 방정식을

$y + 2 = m(x - 1)$ $\cdots$①이라 하면

①식을 점 $(2, 3)$에 대칭이동하면 (중점공식이용)

$x \to 4 - x$ $y \to 6 - y$이므로

$6 - y + 2 = m(4 - x - 1)$, $y = m(x - 3) + 8 \cdots$②

직선 ②를 x축에 대칭이동하면

$-y = m(x - 3) + 8 \quad \cdots$③

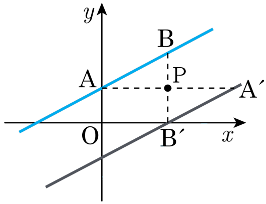
직선 ③이 점 $(4, -4)$를 지나므로

$4 = m(4 - 3) + 8$ $\therefore m = -4$

따라서 처음 직선의 방정식 ①은

$y + 2 = -4(x - 1)$, $y = -4x + 2$

11. 다음 그림과 같이 좌표평면 위의 한 점 P 에 대한 두 점 A, B 의 대칭점은 각각 A', B' 이고, 직선 AB 의 방정식은 $x-2y+4=0$ 이라 한다. 점 A' 의 좌표가 $(3,1)$, 직선 $\mathrm{A}'\mathrm{B}'$ 의 방정식이 $y=ax+b$ 일 때, 두 상수 a, b 의 곱은?



① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

해설

두 점 A', B' 은 각각 점 P 에 대한 두 점 A, B 의 대칭점이므로 직선 $\mathrm{A}'\mathrm{B}'$ 은 직선 AB 의 점대칭도형이다.

즉, $\triangle \mathrm{APB} \equiv \triangle \mathrm{A}'\mathrm{PB}'$ 에서

$\angle \mathrm{ABP} = \angle \mathrm{A}'\mathrm{B}'\mathrm{P}$ (엇각) 이므로

$\overleftrightarrow{\mathrm{AB}} \,/\!/\, \overleftrightarrow{\mathrm{A}'\mathrm{B}'}$

따라서, 직선 $\mathrm{A}'\mathrm{B}'$ 의 기울기는 직선 AB 의 기울기인 $\frac{1}{2}$ 과 같다.

또, 직선 $\mathrm{A}'\mathrm{B}'$ 은 점 $\mathrm{A}'(3,1)$ 을 지나므로 직선 $\mathrm{A}'\mathrm{B}'$ 의 방정식은

$$y-1=\frac{1}{2}(x-3)$$

$$\therefore y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$$

따라서, $a=\frac{1}{2}, b=-\frac{1}{2}$ 이므로

$$ab=-\frac{1}{4}$$

12. 포물선 $y = x^2$ 을 점 P 에 대하여 대칭이동 시켰더니 포물선 $y = -x^2 + 4x - 2$ 가 되었다. 이 때 점 P 의 좌표는?

① $(1,\ 1)$ ② $(1,\ 2)$ ③ $(-1,\ 1)$

④ $(-1,\ -1)$ ⑤ $(1,\ -1)$

해설

두 포물선이 한 점에 대하여 서로 대칭이면
두 포물선의 꼭지점도 이 점에 대하여 서로 대칭이다.
포물선 $y = x^2$ 의 꼭지점의 좌표는 $O(0,\ 0)$ 이고
포물선 $y = -x^2 + 4x - 2$ 의 꼭지점의 좌표는 $A(2,\ 2)$ 이다.
이 때, 점 P 는 선분 OA 의 중점이므로 P 의 좌표는 $P(1,\ 1)$ 이다.